Digitized by Google

I.E.6. 203

[illegible] Mc [illegible]
Dec 31
1713

NEWTON
1713

4

II

Neutoni Grande nomen cui quicquid ubiq; est
gentis Mathematicæ assurgit venerabundum. Cl^{mi} L.

Digitized by Google

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO,

EQUITE AURATO.

EDITIO SECUNDA AUCTIOR ET EMENDATIOR.





CANTABRIGIÆ, MDCCXIII.

Digitized by Google

Digitized by Google

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI,

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMÆ REGINÆ

ANNÆ

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC D. D. D.

JS. NEWTONUS.

Digitized by Google

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

Sæculi Gentiſque noſtræ Decus egregium.

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Conderet, omnipotens ſibi Leges ipſe Creator
Dixerit, atque operum quæ fundamenta locarit.
Intima panduntur victi penetralia Cæli,
Nec latet, extremos quæ Vis circumrotet Orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Hinc patet, horrificis qua ſit via flexa Cometis:
Diſcimus hinc tandem, qua cauſa argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis eat, & cur ſubdita nulli
Hactenus Aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeent Nodi, curque Auges progrediantur.
Diſcimus, & quantis refluum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellat; feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alterniſve ruens ſpumantia littora pulſat.

Quæ

Digitized by Google

Quæ toties animos veterum torſere Sophorum,
Quæque Scholas hodie rauco certamine vexant,
Obvia conſpicimus; nubem pellente Matheſi:
Quæ ſuperas penetrare domos, atque ardua Cæli,
NEWTONI auſpiciis, jam dat contingere Templa.
Surgite Mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires cognoſcite Mentis,
A pecudum vita longe longeque remotæ.
Qui ſcriptis primus Tabulis compeſcere Cædes,
Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis;
Quive vagis populis circumdare mœnibus Urbes
Auctor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab Uva;
Vel qui Niliaca monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere Voces;
Humanam ſortem minus extulit; utpote pauca
In commune ferens miſeræ ſolatia vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita diæ
Clauſtra patent Naturæ, & rerum immobilis ordo;
Et quæ præteritis latuere incognita ſæclis.
Talia monſtrantem juſtis celebrate Camænis,
Vos qui cæleſti gaudetis nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia Veri,
NEWTONUM Muſis carum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit Numine mentem:
Nec fas eſt propius Mortali attingere Divos.

EDM. HALLEY.

PRÆ-

AUCTORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

CUM Veteres Mechanicam (*uti Auctor eſt* Pappus) *in rerum Naturalium inveſtigatione maximi fecerint; & Recentiores, miſſis formis ſubſtantialibus & qualitatibus occultis, Phænomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggreſſi ſint: Viſum eſt in hoc Tractatu* Matheſin *excolere, quatenus ea ad* Philoſophiam *ſpectat.* Mechanicam *vero duplicem Veteres conſtituerunt:* Rationalem *quæ per Demonſtrationes accurate procedit, &* Practicam. *Ad Practicam ſpectant Artes omnes Manuales, a quibus utique* Mechanica *nomen mutuata eſt. Cum autem Artifices parum accurate operari ſoleant, fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita diſtinguatur, ut quicquid accuratum ſit ad* Geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non ſunt Artis ſed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior eſt Mechanicus, & ſi quis accuratiſſime operari poſſet, hic foret Mechanicus omnium perfectiſſimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum deſcriptiones in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas deſcribere* Geometria *non docet ſed poſtulat. Poſtulat enim ut Tyro eaſdem accurate deſcribere prius didicerit quam limen attingat* Geometriæ; *dein, quomodo per has operationes Problemata ſolvantur, docet. Rectas & Circulos deſcribere Problemata ſunt, ſed*

ſed non Geometrica. Ex Mechanica poſtulatur horum ſolutio, in Geometria docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur Geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur Geometria in praxi Mechanica, & nihil aliud eſt quam Mechanicæ univerſalis pars illa quæ artem menſurandi accurate proponit ac demonſtrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue verſentur, fit ut Geometria ad magnitudinem, Mechanica ad motum vulgo referatur. Quo ſenſu Mechanica rationalis erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuſcunque reſultant, & Virium quæ ad motus quoſcunque requiruntur, accurate propoſita ac demonſtrata. Pars hæc Mechanicæ a Veteribus in Potentiis quinque ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non ſit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis conſiderarunt. Nos autem non Artibus ſed Philoſophiæ conſulentes, deque potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, Levitatem, vim Elaſticam, reſiſtentiam Fluidorum & ejuſmodi vires ſeu attractivas ſeu impulſivas ſpectant: Et ea propter, hæc noſtra tanquam Philoſophiæ principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut a Phænomenis motuum inveſtigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et huc ſpectant Propoſitiones generales quas Libro primo & ſecundo pertractavimus. In Libro autem tertio Exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem Syſtematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cæleſtibus, per Propoſitiones in Libris prioribus Mathematice demonſtratas, derivantur vires Gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propoſitiones etiam Mathematicas, deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil ſuſpicer ea omnia

nia

Digitized by Google

nia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas vel in ſe mutuo impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philoſophi hactenus Naturam fruſtra tentarunt. Spero autem quod vel huic Philoſophandi modo, vel veriori alicui, Principia hic poſita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, Vir acutiſſimus & in omni literarum genere eruditiſſimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum Typothetarum Sphalmata correxit & Schemata incidi curavit, ſed etiam Auctor fuit ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonſtratam a me Figuram Orbium cæleſtium impetraverat, rogare non deſtitit ut eandem cum* Societate Regali *communicarem, Quæ deinde hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At poſtquam Motuum Lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cœpiſſem quæ ad leges & menſuras Gravitatis & aliarum virium, & Figuras a corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in Mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus Mediorum, ad Orbes Cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus Lunares ſpectant, (imperfecta cum ſint,) in Corollariis Propoſitionis* LXVI. *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum Propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſero inventa locis minus idoneis inſerere malui, quam numerum Propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus inveſtigentur, & benigne ſuppleantur, enixe rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio
S. Trinitatis, Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

In

Digitized by Google

AUCTORIS PRÆFATIO.

In hac Secunda Principiorum Editione, multa ſparſim emendantur & nonnulla adjiciuntur. In Libri primi Sectione II, *Inventio virium quibus corpora in Orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In Libri ſecundi Sectione* VII, *Theoria reſiſtentiæ Fluidorum accuratius inveſtigatur & novis Experimentis confirmatur. In Libro tertio Theoria Lunæ & Præceſſio Æquinoctiorum ex Principiis ſuis plenius deducuntur, & Theoria Cometarum pluribus & accuratius computatis Orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

E D I-

Digitized by Google

EDITORIS PRÆFATIO.

NEWTONIANÆ Philoſophiæ novam tibi, Lector benevole, diuque deſideratam Editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc Opere celeberrimo, intelligere potes ex Indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te fere docebit Auctoris Præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de Methodo hujus Philoſophiæ.

Qui Phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres fere claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus Qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ Scholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique ſingulos Effectus ex corporum ſingularibus Naturis oriri; at unde ſint illæ Naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; Sermonem quendam Philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, Philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperarunt, rejecta Vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque Materiam univerſam homogeneam eſſe, omnem vero Formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progreſſio inſtituitur a ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipſa tribuit Natura. Verum ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertoſque ſitus & motus; quin & fingendi Fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglecta rerum conſtitutione vera: quæ ſane fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certiſſimas Obſervationes inveſtigari poſſit. Qui ſpeculationum

Digitized by Google

ſuarum fundamentum deſumunt ab Hypotheſibus, etiamſi deinde ſecundum leges Mechanicas accuratiſſime procedant; Fabulam quidem elegantem forte & venuſtam, Fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui Philoſophiam ſcilicet Experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem Principii loco aſſumunt, quod nondum ex Phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in Phyſicam recipiunt, niſi ut Quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque Methodo incedunt, Analytica & Synthetica. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam Phænomenis per Analyſin deducunt, ex quibus deinde per Syntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt Philoſophandi ratio longe optima, quam præ ceteris merito amplectendam cenſuit Celeberrimus Auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit, in qua excolenda atque adornanda operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit Exemplum, Mundani nempe Syſtematis explicationem e Theoria Gravitatis feliciſſime deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus Ille & ſolus ex Apparentiis demonſtrare potuit, & ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis Viros, præjudiciis quibuſdam plus æquo occupatos, huic novo Principio ægre aſſentiri potuiſſe, & certis incerta identidem prætuliſſe. Horum famam vellicare non eſt animus: Tibi potius, Benevole Lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus Tute ipſe judicium non iniquum feras.

Igitur ut Argumenti ſumatur exordium a ſimpliciſſimis & proximis; deſpiciamus pauliſper qualis ſit in Terreſtribus natura Gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora Cæleſtia, longiſſime a ſedibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes Philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in Terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit Experientia multiplex. Quæ dicitur Levitas relativa, non eſt vera Levitas, ſed apparens ſolummodo; & oritur a præpollente Gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora univerſa gravitant in Terram, ita Terra viciſſim in corpora æqualiter gravitat; Gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur Terræ totius

Digitized by Google

totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra Experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, Gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro Terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in Vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublata ſcilicet Aeris reſiſtentia: accuratius autem comprobatur per Experimenta Pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in Terram & Terra viciſſim in corpora momentis æqualibus graviteut; Terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis qua corpus Terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in Terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque Terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem aucta vel diminuta mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque Telluris ex conjunctis partium Actionibus conflari cenſenda erit; atque adeo corpora omnia Terreſtria ſe mutuo trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ trahentis. Hæc eſt natura Gravitatis apud Terram: videamus jam qualis ſit in Cælis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; Naturæ lex eſt ab omnibus recepta Philoſophis. Inde vero ſequitur, corpora quæ in Curvis moventur, atque adeo de lineis rectis Orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, Vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in Orbibus curvis revolventibus neceſſario aderit Vis aliqua, per cujus actiones repetitas indeſinenter a Tangentibus deflectantur.

Jam

Jam illud concedi æquum eſt, quod Mathematicis rationibus colligitur & certiſſime demonſtratur; Corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano deſcripta, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcunque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a Viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cum igitur in confeſſo ſit apud Aſtronomos, Planetas primarios circum Solem, ſecundarios vero circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut Vis illa, qua perpetuo detorquentur a Tangentibus rectilineis, & in Orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in Orbitarum centris. Hæc itaque Vis non inepte vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, Centripeta; reſpectu autem corporis centralis, Attractiva; a quacunque demum cauſa oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & Mathematice demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in Circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum a centro communi; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in Orbitis quæ ſunt Circulis finitimæ, & quieſcant Orbitarum Apſides; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in Planetis univerſis conſentiunt Aſtronomi. Itaque Vires centripetæ Planetarum omnium ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum ab Orbium centris. Si quis objiciat Planetarum, & Lunæ præſertim, Apſides non penitus quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe quod Vis centripetæ proportio aberret aliquantum a duplicata, aberrationem illam per computum Mathematicum inveniri poſſe & plane inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio Vis centripetæ Lunaris, quæ omnium maxime turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc vero ſexaginta fere vicibus propius accedet quam ad triplicatam. Sed verior erit reſponſio, ſi dicamus hanc Apſidum progreſſionem, non ex aberratione a duplicata proportione, ſed ex alia prorſus diverſa cauſa oriri, quemadmodum egregie commonſtratur in hac Philoſophia. Reſtat ergo ut Vires centripetæ, quibus Planetæ primarii tendunt verſus Solem & ſecundarii verſus primarios ſuos, ſint accurate ut quadrata diſtantiarum reciproce.

Ex

PRÆFATIO.

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat Planetas in Orbitis ſuis retineri per Vim aliquam in ipſos perpetuo agentem: conſtat Vim illam dirigi ſemper verſus Orbitarum centra: conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui in eadem proportione qua diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtituta inter Planetarum Vires centripetas & Vim Gravitatis, annon ejuſdem forte ſint generis. Ejuſdem vero generis erunt, ſi deprehendantur hinc & inde leges eædem eædemque affectiones. Primo itaque Lunæ, quæ nobis proxima eſt, Vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motus initio deſcribuntur, ubi a viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus: Hoc utique conſequitur ex ratiociniis Mathematicis. Erit igitur Vis centripeta Lunæ in Orbita ſua revolventis, ad Vim Gravitatis in ſuperficie Terræ, ut ſpatium quod tempore quam minimo deſcriberet Luna deſcendendo per Vim centripetam verſus Terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur, ad ſpatium quod eodem tempore quam minimo deſcribit grave corpus in vicinia Terræ, per Vim gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcus a Luna per idem tempus deſcripti ſinui verſo, quippe qui Lunæ tranſlationem de Tangente, factam a Vi centripeta, metitur; atque adeo computari poteſt ex datis tum Lunæ tempore periodico tum diſtantia ejus a centro Terræ. Spatium poſterius invenitur per Experimenta Pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, ſpatium prius ad ſpatium poſterius, ſeu vis centripeta Lunæ in Orbita ſua revolventis ad vim Gravitatis in ſuperficie Terræ, erit ut quadratum ſemidiametri Terræ ad Orbitæ ſemidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ ſuperius oſtenduntur, vis centripeta Lunæ in Orbita ſua revolventis ad vim Lunæ centripetam prope Terræ ſuperficiem. Vis itaque centripeta prope Terræ ſuperficiem æqualis eſt vi Gravitatis. Non ergo diverſæ ſunt vires, ſed una atque eadem: ſi enim diverſæ eſſent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in Terram caderent quam ex vi ſola Gravitatis. Conſtat igitur Vim illam centripetam, qua Luna perpetuo de Tangente vel trahitur vel impellitur & in Orbita retinetur, ipſam eſſe vim Gravitatis terreſtris ad Lunam uſque pertingentem. Et rationi quidem conſentaneum eſt ut ad ingentes diſtantias illa ſeſe Virtus extendat,

cum

Digitized by Google

cum nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque Luna in Terram: quin & actione mutua, Terra viciſſim in Lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac Philoſophia, ubi agitur de Maris æſtu & Æquinoctiorum præceſſione, ab actione tum Lunæ tum Solis in Terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis Gravitatis decreſcat in majoribus a Tellure diſtantiis. Nam cum Gravitas non diverſa ſit a Vi centripeta Lunari, hæc vero ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & Gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad Planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa Solem & ſecundariorum circa Jovem & Saturnum ſunt Phænomena generis ejuſdem ac revolutio Lunæ circa Terram, quoniam porro demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi verſus centrum Solis, ſecundariorum verſus centra Jovis & Saturni, quemadmodum Lunæ vis centripeta verſus Terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centris, quemadmodum vis Lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ a Terra: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut Luna gravitat in Terram, & Terra viciſſim in Lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim in ſecundarios; ſic & omnes primarii in Solem, & Sol viciſſim in primarios.

Igitur Sol in Planetas univerſos gravitat & univerſi in Solem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur interea circum Solem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis Planetæ gravitant in Solem, & Sol in ipſos. Secundarios vero Planetas in Solem gravitare abunde inſuper conſtat ex inæqualitatibus Lunaribus; quarum accuratiſſimam Theoriam, admiranda ſagacitate patefactam, in tertio hujus Operis libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſime colligi poteſt ex motu Cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam Solis, & nonnunquam adeo ad ipſum proxime accedunt ut Globum ejus, in Periheliis ſuis verſantes, tantum non contingere videantur. Horum Theoriam ab Aſtronomis antehac fruſtra quæſitam, noſtro tandem ſæculo feliciter inventam & per Obſervationes certiſſime demonſtratam, Præſtantiſſimo noſtro Auctori debemus. Patet igitur

Digitized by Google

igitur Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales deſcribere. Ex hiſce vero Phænomenis manifeſtum eſt & Mathematice comprobatur, vires illas, quibus Cometæ retinentur in orbitis ſuis, reſpicere Solem & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro. Gravitant itaque Cometæ in Solem: atque adeo Solis vis attractiva non tantum ad corpora Planetarum in datis diſtantiis & in eodem fere plano collocata, ſed etiam ad Cometas in diverſiſſimis Cælorum regionibus & in diverſiſſimis diſtantiis poſitos pertingit. Hæc igitur eſt natura corporum gravitantium, ut vires ſuas edant ad omnes diſtantias in omnia corpora gravitantia. Inde vero ſequitur, Planetas & Cometas univerſos ſe mutuo trahere, & in ſe mutuo graves eſſe: quod etiam confirmatur ex perturbatione Jovis & Saturni, Aſtronomis non incognita, & ab actionibus horum Planetarum in ſe invicem oriunda; quin & ex motu illo lentiſſimo Apſidum, qui ſupra memoratus eſt, quique a cauſa conſimili proficiſcitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum ſit, & Terram & Solem & corpora omnia cæleſtia, quæ Solem comitantur, ſe mutuo attrahere. Singulorum ergo particulæ quæque minimæ vires ſuas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum ſupra de Terreſtribus oſtenſum eſt. In diverſis autem diſtantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione diſtantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere Globos eadem lege trahentes, Mathematice demonſtratur.

Concluſiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod a nullis non recipitur Philoſophis; Effectuum ſcilicet ejuſdem generis, quorum nempe quæ cognoſcuntur proprietates eædem ſunt, eaſdem eſſe cauſas & eaſdem eſſe proprietates quæ nondum cognoſcuntur. Quis enim dubitat, ſi Gravitas ſit cauſa deſcenſus Lapidis in *Europa*, quin eadem ſit cauſa deſcenſus in *America*? Si Gravitas mutua fuerit inter Lapidem & Terram in *Europa*; quis negabit mutuam eſſe in *America*? Si vis attractiva Lapidis & Terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit ſimilem eſſe compoſitionem in *America*? Si attractio Terræ ad omnia corporum genera & ad omnes diſtantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac Regula fundatur omnis Philoſophia: quippe qua ſublata nihil affirmare poſſimus de Univerſis. Conſtitutio rerum ſingularum innoteſcit per Obſervationes & Experimenta: inde vero non

niſi per hanc Regulam de rerum univerſarum natura judicamus.

Jam cum Gravia ſint omnia corpora, quæ apud Terram vel in Cælis reperiuntur, de quibus Experimenta vel Obſervationes inſtituere licet; omnino dicendum erit, Gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint Extenſa, Mobilia, & Impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non ſint Gravia. Corporum Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non niſi per Experimenta innoteſcunt: eodem plane modo Gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus Obſervationes habemus, Extenſa ſunt & Mobilia & Impenetrabilia: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus Obſervationes non habemus, Extenſa eſſe & Mobilia & Impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt Gravia, de quibus Obſervationes habemus: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus Obſervationes non habemus, Gravia eſſe. Si quis dicat corpora Stellarum inerrantium non eſſe Gravia, quandoquidem eorum Gravitas nondum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit neque Extenſa eſſe, nec Mobilia, nec Impenetrabilia, cum hæ Fixarum affectiones nondum ſint obſervatæ. Quid opus eſt verbis? Inter primarias qualitates corporum univerſorum vel Gravitas habebit locum; vel Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum Gravitatem, vel non recte explicabitur per corporum Extenſionem, Mobilitatem, & Impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare concluſionem, & de occultis qualitatibus neſcio quid muſſitare. Gravitatem ſcilicet Occultum eſſe quid, perpetuo argutari ſolent; occultas vero cauſas procul eſſe ablegandas a Philoſophia. His autem facile reſpondetur; occultas eſſe cauſas, non illas quidem quarum exiſtentia per Obſervationes clariſſime demonſtratur, ſed has ſolum quarum occulta eſt & ficta exiſtentia nondum vero comprobata. Gravitas ergo non erit occulta cauſa motuum cæleſtium; ſiquidem ex Phænomenis oſtenſum eſt, hanc virtutem revera exiſtere. Hi potius ad occultas confugiunt cauſas; qui neſcio quos Vortices, materiæ cujuſdam prorſus fictitiæ & ſenſibus omnino ignotæ, motibus iiſdem regendis præficiunt.

Ideone autem Gravitas occulta cauſa dicetur, eoque nomine rejicietur e Philoſophia, quod cauſa ipſius Gravitatis occulta eſt & nondum inventa? Qui ſic ſtatuunt, videant nequid ſtatuant

Digitized by Google

ant abſurdi, unde totius tandem Philoſophiæ fundamenta convellantur. Etenim cauſæ continuo nexu procedere ſolent a compoſitis ad ſimpliciora: ubi ad cauſam ſimpliciſſimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Cauſæ igitur ſimpliciſſimæ nulla dari poteſt mechanica explicatio: ſi daretur enim, cauſa nondum eſſet ſimpliciſſima. Has tu proinde cauſas ſimpliciſſimas appellabis occultas, & exulare jubebis? ſimul vero exulabunt & ab his proxime pendentes & quæ ab illis porro pendent, uſque dum a cauſis omnibus vacua fuerit & probe purgata Philoſophia.

Sunt qui Gravitatem præter naturam eſſe dicunt, & Miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt, cum in Phyſica præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic ineptæ prorſus objectioni diluendæ, quæ & ipſa Philoſophiam ſubruit univerſam, vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim Gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt, quod tamen dici non poteſt: vel eo nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque adeo ex cauſis Mechanicis originem non habeat. Dantur certe primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis ſit deinde futura Philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota Phyſica cæleſtis vel ideo minus placet, quod cum *Carteſii* dogmatibus pugnare & vix conciliari poſſe videatur. His ſua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam ſibi concedi poſtulant. NEWTONIANAM itaque Philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & cauſas ſequi per Phænomena comprobatas, potius quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram Philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis vere exiſtentibus derivare: eas vero leges quærere, quibus voluit Summus opifex hunc Mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut a pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit Effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex qua vere atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in Philoſophia vera. In Horologiis automatis idem Indicis horarii motus vel ab appenſo Pondere vel ab intus concluſo Elatere oriri poteſt. Quod ſi oblatum Horologium revera ſit inſtructum Pondere;

ridebitur qui finget Elaterem, & ex Hypotheſi ſic præpropere conficta motum Indicis explicare ſuſcipiet: oportuit enim internam Machinæ fabricam penitius perſcrutari, ut ita motus propoſiti principium verum exploratum habere poſſet. Idem vel non abſimile feretur judicium de Philoſophis illis, qui materia quadam ſubtiliſſima Cælos eſſe repletos, hanc autem in Vortices indeſinenter agi voluerunt. Nam ſi Phænomenis vel accuratiſſime ſatisfacere poſſent ex Hypotheſibus ſuis; veram tamen Philoſophiam tradidiſſe, & veras cauſas motuum cæleſtium inveniſſe nondum dicendi ſunt; niſi vel has revera exiſtere, vel ſaltem alias non exiſtere demonſtraverint. Igitur ſi oſtenſum fuerit, univerſorum corporum Attractionem habere verum locum in rerum natura; quinetiam oſtenſum fuerit, qua ratione motus omnes cæleſtes abinde ſolutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio, ſi quis dixerit eoſdem motus per Vortices explicari debere, etiamſi id fieri poſſe vel maxime conceſſerimus. Non autem concedimus: Nequeunt enim ullo pacto Phænomena per Vortices explicari; quod ab Auctore noſtro abunde quidem & clariſſimis rationibus evincitur; ut ſomniis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptiſſimo figmento reſarciendo, noviſque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora Planetarum & Cometarum circa Solem deferantur a Vorticibus; oportet corpora delata & Vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque curſus determinatione moveri, & eandem habere denſitatem vel eandem Vim inertiæ pro mole materiæ. Conſtat vero Planetas & Cometas, dum verſantur in iiſdem regionibus Cælorum, velocitatibus variis variaque curſus determinatione moveri. Neceſſario itaque ſequitur, ut Fluidi cæleſtis partes illæ, quæ ſunt ad eaſdem diſtantias a Sole, revolvantur eodem tempore in plagas diverſas cum diverſis velocitatibus: etenim alia opus erit directione & velocitate, ut tranſire poſſint Planetæ; alia, ut tranſire poſſint Cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, univerſa corpora cæleſtia non deferri a materia Vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos eſſe non ab uno eodemque Vortice, ſed a pluribus qui ab invicem diverſi ſint, idemque ſpatium Soli circumjectum pervadant.

Si plures Vortices in eodem ſpatio contineri, & ſeſe mutuo penetrare, motibuſque diverſis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent eſſe conformes delatorum corporum motibus, qui

ſunt

ſunt ſumme regulares, & peraguntur in Sectionibus Conicis, nunc valde eccentricis, nunc ad Circulorum proxime formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri poſſit, ut iidem integri conſerventur, nec ab actionibus materiæ occurſantis per tot ſæcula quicquam perturbentur. Sane ſi motus hi fictitii ſunt magis compoſiti & difficilius explicantur, quam veri illi motus Planetarum & Cometarum; fruſtra mihi videntur in Philoſophiam recipi: omnis enim Cauſa debet eſſe Effectu ſuo ſimplicior. Conceſſa Fabularum licentia, affirmaverit aliquis Planetas omnes & Cometas circumcingi Atmoſphæris, adinſtar Telluris noſtræ; quæ quidem Hypotheſis rationi magis conſentanea videbitur quam Hypotheſis Vorticum. Affirmaverit deinde has Atmoſphæras, ex natura ſua, circa Solem moveri & Sectiones Conicas deſcribere; qui ſane motus multo facilius concipi poteſt, quam conſimilis motus Vorticum ſe invicem permeantium. Denique Planetas ipſos & Cometas circa Solem deferri ab Atmoſphæris ſuis credendum eſſe ſtatuat, & ob repertas motuum cæleſtium cauſas triumphum agat. Quiſquis autem hanc Fabulam rejiciendam eſſe putet, idem & alteram Fabulam rejiciet: nam ovum non eſt ovo ſimilius, quam Hypotheſis Atmoſphærarum Hypotheſi Vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in Parabola moti deflexionem a curſu rectilineo oriri a Gravitate lapidis in Terram, ab occulta ſcilicet qualitate. Fieri tamen poteſt ut alius aliquis, naſi acutioris, Philoſophus cauſam aliam comminiſcatur. Finget igitur ille materiam quandam ſubtilem, quæ nec viſu, nec tactu, neque ullo ſenſu percipitur, verſari in regionibus quæ proxime contingunt Telluris ſuperficiem. Hanc autem materiam, in diverſas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas Parabolicas deſcribere contendet. Deinde vero lapidis deflexionem pulchre ſic expediet, & vulgi plauſum merebitur. Lapis, inquiet, in Fluido illo ſubtili natat; & curſui ejus obſequendo, non poteſt non eandem una ſemitam deſcribere. Fluidum vero movetur in lineis Parabolicis; ergo lapidem in Parabola moveri neceſſe eſt. Quis nunc non mirabitur acutiſſimum hujuſce Philoſophi ingenium, ex cauſis Mechanicis, materia ſcilicet & motu, phænomena Naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducentis? Quis vero non ſubſannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine Mathematico qualitates occultas, e Philoſophia feliciter excluſas, denuo revocare ſuſtinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Sum-

Digitized by Google

Summa rei huc tandem redit: Cometarum ingens eſt numerus; motus eorum ſunt ſumme regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant. Moventur in Orbibus Conicis, hi orbes ſunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes Cælorum partes, & Planetarum regiones liberrime pertranſeunt, & ſæpe contra Signorum ordinem incedunt. Hæc Phænomena certiſſime confirmantur ex Obſervationibus Aſtronomicis: & per Vortices nequeunt explicari: Imo, ne quidem cum Vorticibus Planetarum conſiſtere poſſunt. Cometarum motibus omnino locus non erit; niſi materia illa fictitia penitus e Cælis amoveatur.

Si enim Planetæ circum Solem a Vorticibus devehuntur; Vorticum partes, quæ proxime ambiunt unumquemque Planetam, ejuſdem denſitatis erunt ac Planeta; uti ſupra dictum eſt. Itaque materia illa omnis quæ contigua eſt Orbis magni perimetro, parem habebit ac Tellus denſitatem: quæ vero jacet intra Orbem magnum atque Orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut conſtitutio Vorticis permanere poſſit, debent partes minus denſæ centrum occupare, magis denſæ longius a centro abire. Cum enim Planetarum tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a Sole, oportet partium Vorticis periodos eandem rationem ſervare. Inde vero ſequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Quæ igitur majore intervallo diſtant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde ſi minus denſæ fuerint, neceſſe eſt ut cedant vi majori, qua partes centro propiores aſcendere conantur. Aſcendent ergo denſiores, deſcendent minus denſæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit diſpoſita atque ordinata materia fluida totius Vorticis, ut conquieſcere jam poſſit in æquilibrio conſtituta. Si bina Fluida, quorum diverſa eſt denſitas, in eodem vaſe continentur; utique futurum eſt ut Fluidum, cujus major eſt denſitas, majore vi Gravitatis infimum petat locum: & ratione non abſimili omnino dicendum eſt, denſiores Vorticis partes majore vi centrifuga petere ſupremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars Vorticis, quæ jacet extra Telluris orbem, denſitatem habebit atque adeo vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quam denſitas & vis inertiæ Telluris: inde vero Cometis trajectis orietur ingens reſiſtentia, & valde admodum ſenſibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus ſiſtere atque abſorbere poſſe merito videatur. Conſtat autem ex motu Co-

metarum

Digitized by Google

metarum prorſus regulari, nullam ipſos reſiſtentiam pati quæ vel minimum ſentiri poteſt; atque adeo neutiquam in materiam ullam incurſare, cujus aliqua ſit vis reſiſtendi, vel proinde cujus aliqua ſit denſitas ſeu vis Inertiæ. Nam reſiſtentia Mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua eſt; & ſane vix obſervari poteſt in Fluidis vulgo notis, niſi valde tenacia fuerint adinſtar Olei & Mellis. Reſiſtentia quæ ſentitur in Aere, Aqua, Hydrargyro, & hujuſmodi Fluidis non tenacibus fere tota eſt prioris generis; & minui non poteſt per ulteriorem quemcunque gradum ſubtilitatis, manente Fluidi denſitate vel vi inertiæ, cui ſemper proportionalis eſt hæc reſiſtentia; quemadmodum clariſſime demonſtratum eſt ab Auctore noſtro in peregregia Reſiſtentiarum Theoria, quæ paulo nunc accuratius exponitur, hac ſecunda vice, & per Experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum ſuum Fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Eſt itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, eſt ut Fluidi denſitas; ergo retardatio ſeu reſiſtentia erit ut eadem Fluidi denſitas; neque ullo pacto tolli poteſt, niſi a Fluido ad partes corporis poſticas recurrente reſtituatur motus amiſſus. Hoc autem dici non poterit, niſi impreſſio Fluidi in corpus ad partes poſticas æqualis fuerit impreſſioni corporis in Fluidum ad partes anticas, hoc eſt, niſi velocitas relativa qua Fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati qua corpus irruit in Fluidum, id eſt, niſi velocitas abſoluta Fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas abſoluta Fluidi propulſi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli poteſt Fluidorum reſiſtentia, quæ oritur ab eorundem denſitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; Fluidi cæleſtis nullam eſſe vim inertiæ, cum nulla ſit vis reſiſtendi: nullam eſſe vim qua motus communicetur, cum nulla ſit vis inertiæ: nullam eſſe vim qua mutatio quælibet vel corporibus ſingulis vel pluribus inducatur, cum nulla ſit vis qua motus communicetur: nullam eſſe omnino efficaciam, cum nulla ſit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc Hypotheſin, quæ fundamento plane deſtituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimum quidem inſervit, ineptiſſimam vocare liceat & Philoſopho prorſus

ſus

Digitized by Google

ſus indignam. Qui Cælos materia fluida repletos eſſe volunt, hanc vero non inertem eſſe ſtatuunt; Hi verbis tollunt Vacuum, re ponunt. Nam cum hujuſmodi materia fluida ratione nulla ſecerni poſſit ab inani Spatio; diſputatio tota ſit de rerum nominibus, non de naturis. Quod ſi aliqui ſint adeo uſque dediti Materiæ, ut Spatium a corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, Mundi per omnia pleni conſtitutionem ex voluntate Dei profectam eſſe, propter eum finem, ut operationibus Naturæ ſubſidium præſens haberi poſſet ab Æthere ſubtiliſſimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non poteſt, ſiquidem jam oſtenſum eſt ex Cometarum phænomenis, nullam eſſe hujus Ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, ſiquidem diverſa Mundi conſtitutio eodem argumento pariter ſtabiliri poſſet: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, ſed ex neceſſitate quadam Naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces ſordidas Gregis impuriſſimi. Hi ſunt qui ſomniant Fato univerſa regi, non Providentia; Materiam ex neceſſitate ſua ſemper & ubique extitiſſe, infinitam eſſe & æternam. Quibus poſitis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum neceſſitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam ſi neceſſario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate; pari neceſſitate movebitur in plagam diverſam cum diverſa velocitate; in plagas autem diverſas, cum diverſis velocitatibus, moveri non poteſt; oportet igitur immotam eſſe. Neutiquam profecto potuit oriri Mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate diſtinctus, niſi ex liberrima voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur Naturæ leges: in quibus multa ſane ſapientiſſimi conſilii, nulla neceſſitatis apparent veſtigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, ſed Obſervando atque Experiendo addiſcere debemus. Qui veræ Phyſicæ principia Legeſque rerum, ſola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire ſe poſſe confidit; hunc oportet vel ſtatuere Mundum ex neceſſitate fuiſſe, Legeſque propoſitas ex eadem neceſſitate ſequi; vel ſi per voluntatem Dei conſtitutus ſit ordo Naturæ, ſe tamen, homuncionem miſellum,

Digitized by Google

miſellum, quid optimum factu ſit perſpectum habere. Sana omnis & vera Philoſophia fundatur in Phænomenis rerum: quæ ſi nos vel invitos & reluctantes ad hujuſmodi principia deducunt, in quibus clariſſime cernuntur Conſilium optimum & Dominium ſummum ſapientiſſimi & potentiſſimi Entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibuſdam forſan hominibus minus grata ſint futura. His vel Miracula vel Qualitates occultæ dicantur, quæ diſplicent: verum nomina malitioſe indita non ſunt ipſis rebus vitio vertenda; niſi illud fateri tandem velint, utique debere Philoſophiam in Atheiſmo fundari. Horum hominum gratia non erit labefactanda Philoſophia, ſiquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos Judices præſtantiſſima Philoſophandi ratio, quæ fundatur in Experimentis & Obſervationibus. Huic vero, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc Opere præclaro Illuſtriſſimi noſtri Auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque Problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec ſpes erat humanam mentem aſſurgere potuiſſe, merito admirantur & ſuſpiciunt quicunque paulo profundius in hiſce rebus verſati ſunt. Clauſtris ergo reſeratis, aditum Nobis aperuit ad pulcherrima rerum myſteria. Syſtematis Mundani compagem elegantiſſimam ita tandem patefecit & penitius perſpectandam dedit; ut nec ipſe, ſi nunc reviviſceret, Rex *Alphonſus* vel ſimplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea deſideraret. Itaque Naturæ majeſtatem propius jam licet intueri, & dulciſſima contemplatione frui, Conditorem vero ac Dominum Univerſorum impenſius colere & venerari, qui fructus eſt Philoſophiæ multo uberrimus. Cæcum eſſe oportet, qui ex optimis & ſapientiſſimis rerum ſtructuris non ſtatim videat Fabricatoris Omnipotentis infinitam ſapientiam & bonitatem: inſanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur Eximium NEWTONI Opus adverſus Atheorum impetus munitiſſimum præſidium: neque enim alicunde felicius, quam ex hac pharetra, contra impiam Catervam tela depromſeris. Hoc ſenſit pridem, & in pereruditis Concionibus Anglice Latineque editis, primus egregie demonſtravit Vir in omni Literarum genere præclarus idemque bonarum Artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, Sæculi ſui & Academiæ noſtræ magnum Ornamentum, Collegii noſtri *S. Trinitatis* Magiſter digniſſimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obſtrictum fateri

debeo:

Digitized by Google

debeo: Huic & Tuas quæ debentur gratias, Lector benevole, non denegabis. Is enim, cum a longo tempore Celeberrimi Auctoris amicitia intima frueretur, (qua etiam apud Poſteros cenſeri non minoris æſtimat, quam propriis Scriptis quæ literato orbi in deliciis ſunt inclareſcere) Amici ſimul famæ & ſcientiarum incremento conſuluit. Itaque cum Exemplaria prioris Editionis rariſſima admodum & immani pretio coemenda ſupereſſent; ſuaſit Ille crebris efflagitationibus & tantum non objurgando perpulit denique Virum Præſtantiſſimum, nec modeſtia minus quam eruditione ſumma Inſignem, ut novam hanc Operis Editionem, per omnia elimatam denuo & egregiis inſuper acceſſionibus ditatam, ſuis ſumptibus & auſpiciis prodire pateretur: Mihi vero, pro jure ſuo, penſum non ingratum demandavit, ut quam poſſet emendate id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12. 1713.

Rogerus Cotes Collegii *S. Trinitatis* Socius,
Aſtronomiæ & Philoſophiæ Experimentalis
Profeſſor *Plumianus.*

INDEX

Digitized by Google

INDEX CAPITUM
TOTIUS OPERIS.

PAG.
DEFINITIONES. 1
AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. 12

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECT. I. De *Methodo rationum primarum & ultimarum.* 24
SECT. II. *De inventione Virium centripetarum.* 34
SECT. III. *De motu corporum in Conicis ſectionibus eccentricis.* 48
SECT. IV. *De inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex Umbilico dato.* 59
SECT. V. *De inventione Orbium ubi Umbilicus neuter datur.* 66
SECT. VI. *De inventione Motuum in Orbibus datis.* 97
SECT. VII. *De corporum Aſcenſu & Deſcenſu rectilineo.* 105
SECT. VIII. *De inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.* 114
SECT. IX. *De Motu corporum in Orbibus mobilibus, deque Motu Apſidum.* 121
SECT. X. *De Motu corporum in Superficiebus datis, deque Funependulorum Motu reciproco.* 132
SECT. XI. *De Motu corporum Viribus centripetis ſe mutuo petentium.* 147
SECT. XII. *De corporum Sphæricorum Viribus attractivis.* 173

SECT.

Digitized by Google

Sect. XIII. *De corporum non Sphæricorum Viribus attractivis.* 192
Sect. XIV. *De Motu corporum Minimorum, quæ Viribus centripetis ad ſingulas Magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.* 203

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

Sect. I. *De Motu corporum quibus reſiſtitur in ratione Velocitatis.* 211
Sect. II. *De Motu corporum quibus reſiſtitur in duplicata ratione Velocitatis.* 220
Sect. III. *De Motu corporum quibus reſiſtitur partim in ratione Velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata.* 245
Sect. IV. *De corporum Circulari motu in Mediis reſiſtentibus.* 253
Sect. V. *De denſitate & compreſſione Fluidorum, deque Hydroſtatica.* 260
Sect. VI. *De Motu & Reſiſtentia corporum Funependulorum.* 272
Sect. VII. *De motu Fluidorum & reſiſtentia Projectilium.* 294
Sect. VIII. *De motu per Fluida propagato.* 329
Sect. IX. *De motu Circulari Fluidorum.* 345

DE MUNDI SYSTEMATE LIBER TERTIUS.

Regulæ Philosophandi 357
Phænomena 359
Propositiones 362
Scholium Generale. 481

PHILO-

XVII

PHILOSOPHIÆ NATURALIS Principia MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas Materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius Denſitate & Magnitudine conjunctim.

AER, denſitate duplicata, in ſpatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato ſextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunque diverſimode condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem ſub nomine Corporis vel Maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſque Pondus. Nam Ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta Pendulorum accuratiſſime inſtituta, uti poſthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas Motus eſt menſura ejuſdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis; adeoque in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus eſt, & dupla cum velocitate quadruplus.

Digitized by Google

DEFINITIO III.

Materiæ Vis Inſita eſt potentia reſiſtendi, qua corpus unumquodque, quantum in ſe eſt, perſeverat in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc ſemper proportionalis eſt ſuo corpori, neque differt quicquam ab Inertia maſſæ, niſi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis inſita nomine ſignificantiſſimo Vis Inertiæ dici poſſit. Exercet vero corpus hanc vim ſolummodo in mutatione ſtatus ſui per vim aliam in ſe impreſſam facta; eſtq; exercitium ejus ſub diverſo reſpectu & Reſiſtentia & Impetus: reſiſtentia, quatenus corpus ad conſervandum ſtatum ſuum reluctatur vi impreſſæ; impetus, quatenus corpus idem, vi reſiſtentis obſtaculi difficulter cedendo, conatur ſtatum ejus mutare. Vulgus reſiſtentiam quieſcentibus & impetum moventibus tribuit: ſed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, reſpectu ſolo diſtinguuntur ab invicem; neq; ſemper vere quieſcunt quæ vulgo tanquam quieſcentia ſpectantur.

DEFINITIO IV.

Vis Impreſſa eſt actio in corpus exercita, ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Conſiſtit hæc vis in actione ſola, neque poſt actionem permanet in corpore. Perſeverat enim corpus in ſtatu omni novo per ſolam vim inertiæ. Eſt autem vis impreſſa diverſarum originum, ut ex Ictu, ex Preſſione, ex vi Centripeta.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta eſt, qua corpora verſus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunq; tendunt.

Hujus generis eſt Gravitas, qua corpora tendunt ad centrum terræ; Vis Magnetica, qua ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunq; ſit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circum-

actus,

Digitized by Google

actus, a circumagente manu abire conatur; & conatu ſuo fundam diſtendit, eoq; fortius quo celerius revolvitur; &, quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, qua funda lapidem in manum perpetuò retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & niſi adſit vis aliqua conatui iſti contraria, qua cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideò Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, ſi vi Gravitatis deſtitueretur, non deflecteretur in terram, ſed in linea recta abiret in cælos; idque uniformi cum motu, ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Per gravitatem ſuam retrahitur a curſu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate ſua & velocitate motus. Quo minor erit ejus gravitas vel major velocitas quacum projicitur, eo minus deviabit a curſu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate ſecundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad diſtantiam duorum milliarium, priuſquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quaſi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quaſi decuplo longius: ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri poſſet pro lubitu diſtantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam deſcriberet, ita ut tandem caderet ad diſtantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret priuſquam caderet; vel denique ut in terram nunquam caderet, ſed in cælos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, qua Projectile vi gravitatis in orbem flecti poſſet & terram totam circuire, poteſt & Luna vel vi gravitatis, ſi modo gravis ſit, vel alia quacunque vi, qua in terram urgeatur, retrahi ſemper a curſu rectilineo terram verſus, & in orbem ſuum flecti: & abſque tali vi Luna in orbe ſuo retineri non poteſt. Hæc vis, ſi juſto minor eſſet, non ſatis flecteret Lunam de curſu rectilineo: ſi juſto major, plus ſatis flecteret, ac de orbe terram verſus deduceret. Requiritur quippe, ut ſit juſtæ magnitudinis: & Mathematicorum eſt invenire Vim, qua corpus in dato quovis orbe data cum velocitate accurate retineri poſſit; & viciſſim invenire Viam curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco data cum velocitate egreſſum a data vi flectatur. Eſt autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Abſoluta, Acceleratrix, & Motrix.

Digitized by Google

DEFINI-
TIONES.

DEFINITIO VI.

Vis centripetæ Quantitas Abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro Efficacia cauſæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intenſione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix eſt ipſius menſura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus magnetis ejuſdem major in minori diſtantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium, atque adhuc minor (ut poſthac patebit) in majoribus diſtantiis a globo terræ; in æqualibus autem diſtantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) ſublata Aeris reſiſtentia, æqualiter accelerat.

DEFINITIO VIII.

Vis centripetæ Quantitas Motrix eſt ipſius menſura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; inque corpore eodem majus prope terram, minus in cælis. Hæc Quantitas eſt corporis totius centripetentia ſeu propenſio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innoteſcit ſemper per vim ipſi contrariam & æqualem, qua deſcenſus corporis impediri poteſt.

Haſce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & abſolutas; & diſtinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum & propenſionem totius in centrum ex propenſionibus omnium partium compoſitam; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca ſingula in circuitu diffuſam, ad movenda corpora quæ in ipſis ſunt; vim autem abſolutam ad Centrum, tanquam cauſa aliqua præditum, ſine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro

Digitized by Google

centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat eſt hic conceptus. Nam virium cauſas & ſedes phyſicas jam non expendo.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejuſdem materiæ. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta ſuperficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix ſeu vis gravitans in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix ſeu pondus eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque ſemper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulſus, vel Propenſionis cujuſcunque in centrum, indifferenter & pro ſe mutuo promiſcue uſurpo; has vires non Phyſice ſed Mathematice tantum conſiderando. Unde caveat lector, ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis cauſamve aut rationem Phyſicam alicubi definire, vel centris (quæ ſunt puncta Mathematica) vires vere & Phyſice tribuere; ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſint, explicare viſum eſt. Nam Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notiſſima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates haſce non aliter quam ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares diſtingui.

I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & natura ſua abſq; relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioq; nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

II. Spa-

Digitized by Google

DEFINITIONES.

II. Spatium Abſolutum, natura ſua abſque relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ a ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & a vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cæleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, movetur; ſpatium Aeris noſtri, quod relative & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolute mutabitur perpetuo.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtq; pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales ſunt; Situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neq; tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium, hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; adeoq; locus totius idem cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis Locus eſt navigii regio illa in qua corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæq; adeo movetur una cum navi: & Quies relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At quies Vera eſt permanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti in qua navis ipſa una cum cavitate ſua & contentis univerſis movetur. Unde ſi Terra vere quieſcit, corpus quod relative quieſcit in navi, movebitur vere & abſolute ea cum velocitate qua navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur; orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terra: & ſi corpus etiam movetur relative in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terra, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut ſi Terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur vere in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoq; feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem

Digitized by Google

entem verſus cum velocitatis parte una: movebitur Nauta vere & abſolute in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relative in terra occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

Tempus Abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomia per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro menſura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore motus cœleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis quo Tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis Abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum; ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus merito diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per Æquationem Aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis neceſſitas, tum per experimentum Horologii Oſcillatorii, tum etiam per eclipſes Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæ de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi Loca. In Tempore quoad ordinem ſucceſſionis; in Spatio quoad ordinem ſitus locantur univerſa. De illorum eſſentia eſt ut ſint Loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta Loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti Motus.

Verum quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum a corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur; nec incommode in rebus humanis: in Philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem Quies & Motus abſoluti & relativi ab invicem per Proprietates ſuas & Cauſas & Effectus. Quietis proprietas eſt, quod corpora vere quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cum poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longe ultra, quieſcat abſolute; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, horumne aliquod ad longinquum

 quum illud datam poſitionem ſervet necne; quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit.

Motus proprietas eſt, quod partes, quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quieſcunt. Et propterea motus verus & abſolutus definiri nequit per tranſlationem e vicinia corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent enim corpora externa non ſolum tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam vere quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & ſublata illa tranſlatione non vere quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur. Sunt enim ambientia ad incluſa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, abſq; tranſlatione de vicinia corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quod moto Loco movetur una Locatum: adeoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum & abſolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco ſuo primo, & motu loci hujus de loco ſuo, & ſic deinceps; uſque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ ſupra memorato. Unde motus integri & abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſupra retuli. Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant poſitiones ad invicem; atque adeo ſemper manent immota, ſpatiumque conſtituunt quod Immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt Vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas: at motus relativus generari & mutari poteſt abſq; viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia ſolum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus conſiſtit. Rurſum motus verus a viribus in corpus motum impreſſis ſemper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur neceſſario. Nam ſi eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, ſic imprimantur

mantur

Digitized by Google

mantur ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in qua motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus ubi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit. DEFINITIONES.

Effectus quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem & abſoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat ſitula a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum a contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aqua, & una cum aqua quieſcat; tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: at poſtquam, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit vas, ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim a medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relative. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relative. Igitur conatus iſte non pendet a tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſque revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri ſunt; & relationum inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Syſtemate eorum qui Cælos noſtros infra Cælos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas ſecum deferre; ſingulæ Cælorum partes, & Planetæ qui relative quidem in Cælis ſuis proximis quieſcunt, moventur

DEFINITIONES.

tur vere. Mutant enim poſitiones ſuas ad invicem (ſecus quam fit in vere quieſcentibus) unaque cum cælis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non ſunt eæ ipſæ quantitates, quarum nomina præ ſe ferunt, ſed earum menſuræ illæ ſenſibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum menſuratarum utitur. At ſi ex uſu definiendæ ſunt verborum ſignificationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ menſuræ; & ſermo erit inſolens & pure Mathematicus, ſi quantitates menſuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces haſce de quantitatibus menſuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Matheſin & Philoſophiam, qui quantitates veras cum ipſarum relationibus & vulgaribus menſuris confundunt.

Motus quidem veros corporum ſingulorum cognoſcere, & ab apparentibus actu diſcriminare, difficillimum: eſt propterea quod partes ſpatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in ſenſus. Cauſa tamen non eſt prorſus deſperata. Nam ſuppetunt argumenta, partim ex motibus apparentibus qui ſunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ ſunt motuum verorum cauſæ & effectus. Ut ſi globi duo, ad datam ab invicem diſtantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innoteſceret ex tenſione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari poſſet. Deinde ſi vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum ſimul imprimerentur, innoteſceret ex aucta vel diminuta fili tenſione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri poſſent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id eſt, facies poſticæ, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus quæ ſequuntur, & faciebus oppoſitis quæ præcedunt, cognoſceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri poſſet & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenſo, ubi nihil extaret externum & ſenſibile quocum globi conferri poſſent. Si jam conſtituerentur in ſpatio illo corpora aliqua longinqua datam inter ſe poſitionem ſervantia, qualia ſunt Stellæ Fixæ in regionibus noſtris: ſciri quidem non poſſet ex relativa globorum tranſlatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus eſſet motus. At ſi atten-

Digitized by Google

attenderetur ad filum, & deprenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem Tractatum ſequentem compoſui. DEFINITIONES.

Digitized by Google

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis, niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

LEX II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur) ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſque determinationem componitur.

Digitized by Google

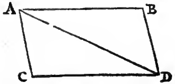
LEX III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum; tantumque impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunque mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, ſed motuum; ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.



Si corpus dato tempore, vi ſola *M* in loco *A* impreſſa, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi ſola *N* in eodem loco impreſſa, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque feretur id eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis per Legem II nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, ſive vis *N* imprimatur, ſive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriuſque lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per Legem I.

COROL.

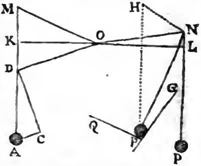
Digitized by Google

Axiomata, ſive

COROLLARIUM II.

Et hinc patet compoſitio vis directæ AD *ex viribus quibuſvis obliquis* AB *&* BD, *& viciſſim reſolutio vis cujuſvis directæ* AD *in obliquas quaſcunque* AB *&* BD. *Quæ quidem compoſitio & reſolutio abunde confirmatur ex Mechanica.*

Ut ſi de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *OM*, *ON* filis *MA*, *NP* ſuſtineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* deſcribatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: & actæ rectæ *OD* parallela ſit *AC*, & perpendicularis *DC*. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa ſint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac ſi ſuſpenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *AD*, & hæc reſolvetur



in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem valet ac ſi perpendiculariter traheret radium *OL* ipſi *OD* æqualem; hoc eſt, idem atque pondus *P*, ſi modo pondus illud ſit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id eſt (ob ſimilia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *OK* ad *OD* ſeu *OL*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ ſunt reciproce ut radii in directum poſiti *OK* & *OL*, idem pollebunt, & ſic conſiſtent in æquilibrio: quæ eſt proprietas notiſſima Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum ſit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod ſi pondus *p* ponderi *P* æquale partim ſuſpendatur filo *Np*, partim incumbat plano obliquo *pG*: agantur *pH*, *NH*, prior horizonti, poſterior plano *pG* perpendicularis; & ſi vis ponderis *p* deorſum tendens, exponatur per lineam *pH*, reſolvi poteſt hæc in vires *pN*, *HN*. Si filo *pN* perpendiculare eſſet planum aliquod *pQ*, ſecans planum alterum *pG* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *pQ*, *pG* ſolummodo incumberet; urgeret

geret

Digitized by Google

geret illud hæc plana viribus *p N*, *H N* perpendiculariter, nimirum planum *p Q* vi *p N*, & planum *p G* vi *H N*. Ideoque ſi tollatur planum *p Q*, ut pondus tendat filum; quoniam filum ſuſtinendo pondus jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eadem vi *p N*, qua planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis *PN*, ut *p N* ad *pH*. Ideoque ſi pondus *p* ſit ad pondus *A* in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum diſtantiarum filorum ſuorum *p N*, *A M* a centro rotæ, & ratione directa *p H* ad *p N*; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque adeo ſe mutuo ſuſtinebunt, ut quilibet experiri poteſt.

Pondus autem *p*, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires cunei & mallei innoteſcunt: utpote cum vis qua pondus *p* urget planum *p Q* ſit ad vim, qua idem vel gravitate ſua vel ictu mallei impellitur ſecundum lineam *p H* in plano, ut *p N* and *p H*; atque ad vim, qua urget planum alterum *p G*, ut *pN* ad *N H*. Sed & vis Cochleæ per ſimilem virium diviſionem colligitur; quippe quæ cuneus eſt a vecte impulſus. Uſus igitur Corollarii hujus latiſſime patet, & late patendo veritatem ſuam evincit; cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diverſimode demonſtrata. Ex hiſce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tenſis & ponderibus directe vel oblique aſcendentibus, cæteriſque potentiis Mechanicis componi ſolent, ut & vires Tendinum ad animalium oſſa movenda.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter ſe.

Etenim actio eique contraria reactio æquales ſunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes verſus contrarias partes. Ergo ſi motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, ſubducetur motui corporis inſequentis ſic, ut ſumma maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit ſubductio de motu utriuſque, adeoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut ſi corpus ſphæricum *A* ſit triplo majus corpore ſphærico *B*, habeatque duas velocitatis partes; & *B* ſequatur in eadem recta cum velocitatis

Digitized by Google

locitatis partibus decem, adeoque motus ipſius *A* ſit ad motum ipſius *B*, ut ſex ad decem: ponantur motus illis eſſe partium ſex & partium decem, & ſumma erit partium ſexdecim. In corporum igitur concurſu, ſi corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, adeoque perget corpus *A* poſt reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus ſeptem vel ſex vel quinque, exiſtente ſemper ſumma partium ſexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoque progrediatur poſt concurſum cum partibus quindecim vel ſexdecim vel ſeptendecim vel octodecim; corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum una parte progredietur amiſſis partibus novem, vel quieſcet amiſſo motu ſuo progreſſivo partium decem, vel cum una parte regredietur amiſſo motu ſuo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progreſſivum partium duodecim. Atque ita ſummæ motuum conſpirantium $15+1$ vel $16+0$, & differentiæ contrariorum $17-1$ & $18-2$ ſemper erunt partium ſexdecim, ut ante concurſum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergent, invenietur cujuſque velocitas, ponendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem, ut motus poſt eſt ad motum ante. Ut in caſu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium ſex ante reflexionem & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motus partes ſex ante reflexionem ad motus partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

Quod ſi corpora vel non Sphærica vel diverſis in rectis moventia incidant in ſe mutuo oblique, & requirantur eorum motus poſt reflexionem; cognoſcendus eſt ſitus plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſus: dein corporis utriuſque motus (per Corol. II.) diſtinguendus eſt in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt ſic, ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujuſmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare.

COROL-

Digitized by Google

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis Centrum, corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter ſe non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in ſe mutuo agentium (excluſis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Nam ſi puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & diſtantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta. Hoc poſtea in Lemmate XXIII demonſtratur, ſi punctorum motus fiant in eodem plano; & eadem ratione demonſtrari poteſt, ſi motus illi non fiant in eodem plano. Ergo ſi corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur diſtantia centri communis corporum duorum & centri communis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur diſtantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & ſic in infinitum. Igitur in ſyſtemate corporum quæ actionibus in ſe invicem aliiſque omnibus in ſe extrinſecus impreſſis omnino vacant, adeoque moventur ſingula uniformiter in rectis ſingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in ſyſtemate duorum corporum in ſe invicem agentium, cum diſtantiæ centrorum utriuſque a communi gravitatis centro ſint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter ſe. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque adeo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus

Digitized by Google

mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciproce proportionales; adeoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

COROLLARIUM V.

Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum abſque motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroq; caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per Legem II æquales erunt congreſſuum effectus in utroq; caſu; & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in Navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

Si corpora moveātur quomodocunq; inter ſe, & a viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, ac ſi viribus illis non eſſent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corpo-

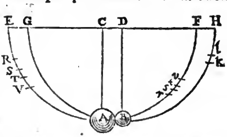
rum)

Digitized by Google

rum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per Legem II. adeoque nunquam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe. LEGES MOTUS.

Scholium.

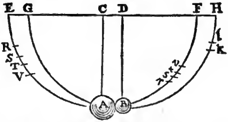
Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per Leges duas primas & Corollaria duo prima *Galilæus* invenit deſcenſum Gravium eſſe in duplicata ratione temporis, & motum Projectilium fieri in Parabola; conſpirante experientia, niſi quatenus motus illi per aeris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Ab iiſdem Legibus & Corollariis pendent demonſtrata de temporibus oſcillantium Pendulorum, ſuffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his iiſdem & Lege tertia *Chriſtophorus Wrennus* Eques Auratus, *Johannes Walliſius S. T. D.* & *Chriſtianus Hugenius*, hujus ætatis Geometrarum facile principes, regulas congreſſuum & reflexionum duorum corporum ſeorſim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes: & primus quidem *Walliſius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata eſt a *Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum: quod etiam *Clariſſimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus eſt. Verum, ut hoc experimentum cum Theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio cum reſiſtentiæ aeris, tum etiam vis Elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora A, B filis parallelis & æqualibus AC, BD, a centris C, D. His centris & intervallis deſcribantur ſemicirculi EAF, GBH radiis CA, DB biſecti. Trahatur corpus A ad arcus EAF punctum quodvis R, & (ſubducto corpore B) demittatur inde, redeatque poſt unam oſcillationem ad punctum V. Eſt RV retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus RV fiat ST pars quarta ſita in medio, ita ſcilicet ut RS & TV æquentur, ſitque RS ad ST ut 3 ad 2. Et iſta ST exhibebit retardationem in deſcenſu ab S ad A quam proxime. Reſtituatur



corpus B in locum ſuum. Cadat corpus A de puncto S, & velocitas ejus in loco reflexionis A, abſque errore ſenſibili, tanta erit ac

Digitized by Google

ſi in vacuo cecidiſſet de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *TA*. Nam velocitatem Penduli in puncto infimo eſſe ut chordam arcus quem cadendo deſcripſit, Propoſitio eſt eſt Geometris notiſſima. Poſt reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; a quo ſi corpus *A* demittatur & poſt unam oſcillationem redeat ad locum *r*, ſit *st* pars quarta ipſius *rv* ſita in medio, ita videlicet ut *rs* & *tu* æquentur; & per chordam arcus *tA* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime poſt reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A*, ſublata aeris reſiſtentia, aſcendere debuiſſet. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* aſcendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud aſcendere debuiſſet in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac ſi in vacuo conſtituti eſſemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam arcus *TA* (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam arcus *tA*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime poſt reflexionem. Et ſic corpus *B* ducendum erit in chordam arcus *Bl*, ut habeatur motus ejus proxime poſt reflexionem. Et ſimili methodo, ubi corpora duo ſimul demittuntur de locis diverſis, inveniendi ſunt motus utriuſq; tam ante, quam poſt reflexionem; & tum demum conferendi ſunt motus inter ſe & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliſſimis, puta pedum octo vel duodecim vel ſexdecim, concurrerent; reperi ſemper ſine errore trium digitorum in menſuris, ubi corpora ſibi mutuo directe occurrebant, quod æquales erant mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque adeo quod actio & reactio ſemper erant æquales. Ut ſi corpus *A* incidebat in corpus *B* cum novem partibus motus, & amiſſis ſeptem partibus pergebat poſt reflexionem cum duabus; corpus *B* reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam ibant *A* cum



duodecim partibus & *B* cum ſex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipſius *A* ſubducantur partes duodecim, & reſtabit

nihil

Digitized by Google

nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandam plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in *B*. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex ſumma motuum conſpirantium & differentia contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accurate. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *A B*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis pilis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.

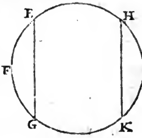
Porro nequis objiciat Regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolute dura eſſe, vel ſaltem perfecte elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo quod Experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi Regula illa in corporibus non perfecte duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elaſticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. Certius id affirmabitur de perfecte Elaſticis. In imperfecte Elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi Elaſtica; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque corpora redire ab invicem cum velocitate relativa, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter conſtricta ſic tentavi. Primum demittendo Pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant Experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata eſt, quæ cum experientia plane congruit.

In-

Digitized by Google

In Attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis *A*, *B* ſe mutuo trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur verſus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis *A* quam preſſione corporis *B*; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus *B*, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & Legi primæ contrarium. Nam per Legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & Ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aqua ſtagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Sic etiam gravitas inter Terram & ejus partes, mutua eſt. Secetur Terra *FI* plano quovis *EG* in partes duas *EGF* & *EGI*: & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuo. Nam ſi plano alio *HK* quod priori *EG* parallelum ſit, pars major *EGI* ſecetur in partes duas *EGKH* & *HKI*, quarum *HKI* æqualis ſit parti prius abſciſſæ *EFG*: manifeſtum eſt quod pars media *EGKH* pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, ſed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema *HKI* toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis qua partium *HKI* & *EGKH* ſumma *EGI* tendit verſus partem tertiam *EGF*, æqualis eſt ponderi partis *HKI*, id eſt ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in ſe mutuo ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, Terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciproce ut vires inſitæ: ſic in movendis Inſtrumentis Mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium

Digitized by Google

virium æſtimatæ, ſunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ oſcillante Libra ſunt reciproce ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt, pondera, ſi recta aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciproce ut punctorum a quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe Libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt oblique, æquipollent quæ ſunt reciproce ut aſcenſus & deſcenſus, quatenus facti ſecundum perpendiculum: id adeo ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in Trochlea ſeu Polyſpaſto vis manus funem directe trahentis, quæ ſit ad pondus vel directe vel oblique aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In Horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, ſi ſunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fiſſi ſunt ad vim mallei in cuneum, ut progreſſus cunei ſecundum determinationem vis a malleo in ipſum impreſſæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, ſecundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par eſt ratio Machinarum omnium. LEGES MOTUS.

Harum efficacia & uſus in eo ſolo conſiſtit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde ſolvitur in omni aptorum inſtrumentorum genere Problema, *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam reſiſtentiam vi data ſuperandi. Nam ſi Machinæ ita formentur, ut velocitates Agentis & Reſiſtentis ſint reciproce ut vires; Agens reſiſtentiam ſuſtinebit: & majori cum velocitatum diſparitate eandem vincet. Certe ſi tanta ſit velocitatum diſparitas, ut vincatur etiam reſiſtentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter ſe labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem ſeparandorum cohæſione & elevandorum ponderibus oriri ſolet; ſuperata omni ea reſiſtentia, vis redundans accelerationem motus ſibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore reſiſtente producet. Ceterum Mechanicam tractare non eſt hujus inſtituti. Hiſce volui tantum oſtendere, quam late pateat quamque certa ſit Lex tertia Motus. Nam ſi æſtimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate

Digitized by Google

tate conjunctim; & ſimiliter Reſiſtentis reactio æſtimetur conjunctim ex ejus partium ſingularum velocitatibus & viribus reſiſtendi ab earum attritione, cohæſione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni inſtrumentorum uſu, ſibi invicem ſemper æquales. Et quatenus actio propagatur per inſtrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne reſiſtens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis ſemper erit contraria.

DE
MOTU CORPORUM
LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.

LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.

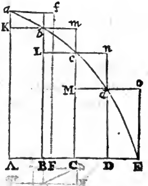
Si negas; fiant ultimò inequales, & ſit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypotheſin.

LEMMA

Digitized by Google

LEMMA II.

Si in Figura quavis AacE, *rectis* Aa, AE *& curva* acE *comprehenſa, inſcribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd, &c. *ſub baſibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *Figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad ſe invicem Figura inſcripta* AKbLcMdD, *circumſcripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *ſunt rationes æqualitatis.*



Nam Figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum *Kl, Lm, Mn, Do,* hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi *Kb* & altitudinum ſumma *Aa,* id eſt, rectangulum *ABla.* Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma 1) Figura inſcripta & circumſcripta & multo magis Figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q.E.D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ ſunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum *FAaf.* Hoc erit majus quam differentia Figuræ inſcriptæ & Figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum Figura curvilinea.

Corol. 2. Et multo magis Figura rectilinea, quæ chordis evaneſ-

Digitized by Google

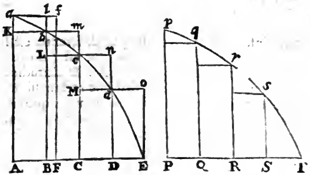
 centium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, *&c.* comprehenditur, coincidit ultimo cum Figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & Figura rectilinea circumſcripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ Figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus Figuris AacE, PprT, *inſcribantur (ut ſupra) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una Figura ad parallelogramma in altera, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico quod Figuræ duæ* AacE, PprT, *ſunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) fit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita Figura ad Figuram; exiſtente nimirum Figura priore (per Lemma III) ad ſummam priorem, & Figura poſteriore ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi duæ cujuſcunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ſuo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam ſi in Lemmatis hujus Figuris ſumantur parallelo-

Digitized by Google

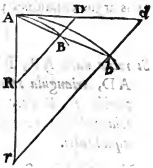
rallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultima ratione partis ad partem.

LEMMA V.

Similium Figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuo reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ ſunt in duplicata ratione laterum.

LEMMA VI.

Si arcus quilibet poſitione datus AB *ſubtendatur chorda* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinque producta* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus* BAD, *ſub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evaneſcet.*



Nam ſi angulus ille non evaneſcit, continebit arcus *AB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad ad punctum *A* non erit continua, contra hypotheſin.

LEMMA VII.

Iiſdem poſitis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem eſt ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur ſemper *AB* & *AD* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & ſecanti *BD* parallela agatur *bd*. Sitque arcus *Ab* ſemper ſimilis arcui *AB*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *dAb*, per Lemma ſuperius, evaneſcet; adeoque rectæ ſemper finitæ *Ab*, *Ad* & arcus intermedius *Ab* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hiſce ſemper proportionales rectæ *AB*, *AD*, & arcus intermedius *AB*

 eva-

evaneſcent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi per *B* ducatur tangenti parallela *BF*, rectam quamvis *AF* per *A* tranſeuntem perpetuo ſecans in *F*, hæc *BF* ultimo ad arcum evaneſcentem *AB* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *AFBD* rationem ſemper habet æqualitatis ad *AD*.



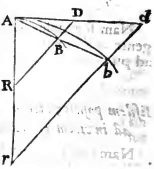
Corol. 2. Et ſi per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, ſecantes tangentem *AD* & ipſius parallelam *BF*; ratio ultima abſciſſarum omnium *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, chordæque & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* AB, *chorda* AB *& tangente* AD, *triangula tria* ARB, ARB, ARD *conſtituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligatur ſemper *AB*, *AD*, *AR* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipſique *RD* parallela agi *rbd*, & arcui *AB* ſimilis ſemper ſit arcus *Ab*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *bAd* evaneſcet, & propterea triangula tria ſemper finita *rAb*, *rAb*, *rAd* coincident, ſuntque eo nomine ſimilia & æqualia. Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia *RAB*, *RAB*, *RAD* fient ultimo ſibi invicem ſimilia & æqualia. *Q. E. D.*

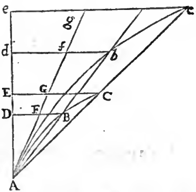


Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA

LEMMA IX.

Si recta AE *& curva* ABC *poſitione datæ ſe mutuo ſecent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C; *dein puncta* B, C *ſimul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*



Etenim dum puncta *B*, *C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur ſemper *AD* produci ad puncta longinqua *d* & *e*, ut ſint *Ad*, *Ae* ipſis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ quæ occurrant ipſis *AB*, *AC* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *Abc* ipſi *ABC* ſimilis, tum recta *Ag*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & ſecet ordinatim applicatas *DB*, *EC*, *db*, *ec* in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum manente longitudine *Ae* coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; & angulo *cAg* evaneſcente, coincident areæ curvilineæ *Abd*, *Ace* cum rectilineis *Afd*, *Age*: adeoque (per Lemma v) erunt in duplicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales ſemper ſunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *ACE* ſunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quacunque Vi finita deſcribit, ſive Vis illa determinata & immutabilis ſit, ſive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, ſunt ipſo motus initio in duplicata ratione Temporum.

Exponantur tempora per lineas *AD*, *AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*; & ſpatia his velocitatibus deſcripta, erunt ut areæ *ABD*, *ACE* his ordinatis deſcriptæ, hoc eſt, ipſo motus initio (per Lemma IX) in duplicata ratione temporum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

Corol.

Digitized by Google

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum ſimiles ſimilium Figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium Errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum a Figurarum ſimilium locis illis ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus abſque viribus iſtis pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad ſimiles Figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directe & quadrata temporum inverſe.

Corol. 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directe & vires inverſe.

Scholium.

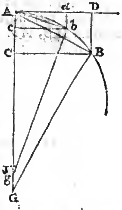
Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciproca. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut ſi A dicatur eſſe ut B directe & C directe & D inverſe: ſenſus eſt, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$, hoc eſt, quod A & $\frac{BC}{D}$ ſunt ad invicem in ratione data.

LEMMA XI.

Subtenſa evaneſcens anguli contactus, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, eſt ultimo in ratione duplicata ſubtenſæ arcus contermini.

Caſ. 1. Sit arcus ille *AB*, tangens ejus *AD*, ſubtenſa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, ſubtenſa arcus *AB*. Huic ſubtenſæ *AB* & tangenti *AD* perpendiculares erigantur *AG*, *BG*, concur-

concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta d, b, g, ſitque J interſectio linearum BG, AG ultimo facta ubi puncta D, B accedunt uſque ad A. Manifeſtum eſt quod diſtantia GJ minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis. Eſt autem (ex natura circulorum per puncta ABG, Abg tranſeuntium) AB *quad.* æquale $AG \times BD$, & Ab *quad.* æquale $Ag \times bd$, adeoque ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* componitur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd. Sed quoniam GJ aſſumi poteſt minor longitudine quavis aſſignata, fieri poteſt ut ratio AG ad Ag minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis aſſignata, adeoque ut ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* minus differat a ratione BD ad bd quam pro differentia quavis aſſignata. Eſt ergo, per Lemma 1, ratio ultima AB *quad.* ad Ab *quad.* æqualis rationi ultimæ BD ad bd. *Q. E. D.*



Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem ſemper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, adeoque eadem ac AB *quad.* ad Ab *quad.* *Q. E. D.*

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, ſed recta BD ad datum punctum convergente, vel alia quacunque lege conſtituatur; tamen anguli D, d communi lege conſtituti ad æqualitatem ſemper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis aſſignata, adeoque ultimo æquales erunt, per Lem. 1, & propterea lineæ BD, bd ſunt in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes AD, Ad, arcus AB, Ab, & eorum ſinus BC, bc fiant ultimo chordis AB, Ab æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut ſubtenſæ BD, bd.

Corol. 2. Eorundem quadrata ſunt etiam ultimo ut ſunt arcuum ſagittæ quæ chordas biſecant & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ BD, bd.

Corol. 3. Ideoque ſagitta eſt in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate deſcribit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB, Adb ſunt ultimo in triplicata ratione laterum AD, Ad, inque ſeſquiplicata laterum DB, db; utpote in compoſita ratione laterum AD, & DB, Ad & db exiſtentia. Sic & triangula ABC, Abc ſunt ultimo in triplicata ratione laterum BC, bc. Rationem vero Seſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempe ex ſimplici & ſubduplicata componitur, quamque alias Seſquialteram dicunt. *Corol.*

Digitized by Google

Corol. 5. Et quoniam DB, db ſunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipſarum AD, Ad: erunt areæ ultimæ curvilineæ ADB, Adb (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB, Adb; & ſegmenta AB, Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc ſegmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium AD, Ad; tum chordarum & arcuum AB, Ab.

Scholium.

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinite majorem eſſe angulis contactuum, quos Circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinite minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum A, nec infinite parvam eſſe nec infinite magnam, ſeu intervallum AJ finitæ eſſe magnitudinis. Capi enim poteſt DB ut AD^3: quo in caſu Circulus nullus per punctum A inter tangentem AD & curvam AB duci poteſt, proindeque angulus contactus erit infinite minor Circularibus. Et ſimili argumento ſi fiat DB ſucceſſive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinite minor priore. Et ſi fiat DB ſucceſſive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactus, quorum primus eſt ejuſdem generis cum Circularibus, ſecundus infinite major, & quilibet poſterior infinite major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinite major minorve priore. Ut ſi inter terminos AD^2 & AD^3 inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facile applicantur ad ſolidorum ſuperficies curvas & contenta. Præmiſi vero hæc Lemmata, ut effugerem tædium deducendi perplexas demonſtrationes, more veterum Geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum Indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt Indiviſibilium hypotheſis, & propterea methodus illa minus Geometrica cenſetur; malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum eva-

Digitized by Google

evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum Indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutius utemur. Proinde in ſequentibus, ſiquando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium Lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cum attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quacum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quacum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quacum eſſe (vel augeri & minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cumque hic limes ſit certus & definitus, Problema eſt vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonſtrandis legitime uſurpantur.

Contendi etiam poteſt, quod ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex Indiviſibilibus, contra quam *Euclides* de Incommenſurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonſtravit. Verum hæc Objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, revera non ſunt rationes quantitatum ultimarum, ſed limites ad quos quantitatum ſine limite decreſcentium rationes ſemper appropinquant; & quas propius aſſequi poſſunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero

Digitized by Google

De Motu Corporum

tranſgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data eſt differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ ſeu maximæ quarum iſta eſt ratio. Igitur in ſequentibus, ſiquando facili rerum conceptui conſulens dixero quantitates quam minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

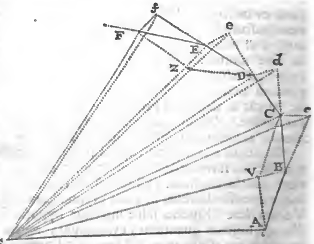
SECTIO II.

De Inventione Virium Centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte deſcribat corpus vi inſita rectam *AB*. Idem ſecunda temporis parte, ſi nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I.) deſcribens lineam *Bc* æqualem ipſi *AB*; adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulſu unico ſed magno, efficiatque ut corpus de recta *Bc* declinet & pergat in recta *BC*. Ipſi



BS parallela agatur *cC*, occurens *BC* in *C*; & completa ſecunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. I.) reperietur in *C*, in

eodem

Digitized by Google

eodem plano cum triangulo *ASB*. Junge *SC*; & triangulum *SBC*, ob parallelas *SB*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atque adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento ſi vis centripeta ſucceſſive agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus ſingulis temporis particulis ſingulas deſcribat rectas *CD*, *DE*, *EF*, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum *SCD* triangulo *SBC*, & *SDE* ipſi *SCD*, & *SEF* ipſi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur: & componendo, ſunt arearum ſummæ quævis *SADS*, *SAFS* inter ſe, ut ſunt tempora deſcriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter *ADF*, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: adeoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indeſinenter; areæ vero quævis deſcriptæ *SADS*, *SAFS* temporibus deſcriptionum ſemper proportionales, erunt iiſdem temporibus in hoc caſu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti eſt in ſpatiis non reſiſtentibus reciproce ut perpendiculum a centro illo in Orbis tangentem rectilineam demiſſum. Eſt enim velocitas in locis illis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, ut ſunt baſes æqualium triangulorum *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*; & hæ baſes ſunt reciproce ut perpendicula in ipſas demiſſa.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus ab eodem corpore ſucceſſive deſcriptorum chordæ *AB*, *BC* compleantur in parallelogrammum *ABCU*, & hujus diagonalis *BU* in ea poſitione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; tranſibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus deſcriptorum chordæ *AB*, *BC* ac *DE*, *EF* compleantur in parallelogramma *ABCU*, *DEFZ*; vires in *B* & *E* ſunt ad invicem in ultima ratione diagonalium *BU*, *EZ*, ubi arcus iſti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus *BC* & *EF* componuntur (per Legum Corol. 1.) ex motibus *Bc*, *BU* & *Ef*, *EZ*: atqui *BU* & *EZ*, ipſis *Cc* & *Ff* æquales, in Demonſtratione Propoſitionis hujus generabantur ab impulſibus vis centripetæ in B & *E*, ideoque ſunt his impulſibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in ſpatiis non reſiſtentibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus deſcriptorum ſagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas biſecant

Digitized by Google

 ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium de quibus egimus in Corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum Parabolicorum quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per Legum Corol. IV, ubi plana in quibus corpora moventur, una cum centris virium quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano deſcripta, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per Leg. 1.) Et vis illa qua corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima SAB, SBC, SCD, &c. circa punctum immobile S temporibus æqualibus æqualia deſcribere, agit in loco B ſecundum lineam parallelam ipſi cC (per Prop. XL, Lib. 1 Elem. & Leg. II.) hoc eſt, ſecundum lineam BS; & in loco C ſecundum lineam ipſi dD parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam SC, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde eſt ſive quieſcat ſuperficies in qua corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta, & puncto ſuo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In Spatiis vel Mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; ſed inde declinant in conſequentia ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modo arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In Mediis etiam reſiſtentibus, ſi arearum deſcriptio acceleratur, virium directiones declinant a concurſu radiorum verſus plagam in quam fit motus.

Scholium

Digitized by Google

Scholium.

Urgeri poteſt corpus a vi centripeta compoſita ex pluribus viribus. In hoc caſu ſenſus Propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro ſi vis aliqua agat perpetuo ſecundum lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur a plano ſui motus: ſed quantitatem ſuperficiei deſcriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compoſitione virium negligenda eſt.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum *L* & corpus alterum *T*: & (per Legum Corol. VI.) ſi vi nova, quæ æqualis & contraria ſit illi qua corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque ſecundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* deſcribere circa corpus alterum *T* areas eaſdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. I.) corpus illud alterum *T* ſibimet ipſi jam relictum vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentia virium, id eſt, urgente vi reliqua perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* deſcribere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto deſcribit areas temporibus proportionales; atque de vi tota (ſive ſimplici, ſive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium ſecundum, compoſita,) qua corpus prius *L* urgetur, ſubducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproxime.

Corol. 3. Et vice verſa, ſi vis reliqua tendit quamproxime ad corpus

Digitized by Google

 corpus alterum *T*, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus *L* radio ad alterum corpus *T* ducto deſcribit areas quæ, cum temporibus collatæ, ſunt valde inæquales; & corpus illud alterum *T* vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum *T* tendentis, vel nulla eſt, vel miſcetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Viſque tota ex omnibus, ſi plures ſunt vires, compoſita, ad aliud (ſive immobile ſive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; ſi modo vis centripeta ſumatur, quæ reſtat poſt ſubductionem vis totius in corpus illud alterum *T* agentis.

Scholium.

Quoniam æquabilis arearum deſcriptio Index eſt Centri, quod vis illa reſpicit qua corpus maxime afficitur, quaque retrahitur a motu rectilineo & in orbita ſua retinetur: quidni uſurpemus in ſequentibus æquabilem arearum deſcriptionem, ut Indicem Centri circum quod motus omnis circularis in ſpatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diverſos circulos æquabili motu deſcribunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & eſſe inter ſe, ut ſunt arcuum ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per Prop. II. & Corol. II. Prop. I; & ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis deſcriptorum ſinus verſi per Corol. IV. Prop. I; hoc eſt, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per Lem. VII: & propterea, cum hi arcus ſint ut arcus temporibus quibuſvis æqualibus deſcripti, & diametri ſint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur, cum arcus illi ſint ut velocitates corporum, vires centripetæ ſunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum: hoc eſt, ut cum Geometris loquar, vires ſunt in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione ſimplici radiorum inverſe.

Corol.

Digitized by Google

Corol. 2. Et, cum tempora periodica ſint in ratione compoſita ex ratione radiorum directe & ratione velocitatum inverſe, vires centripetæ ſunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; hoc eſt, in ratione compoſita ex ratione radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverſe.

Corol. 3. Unde, ſi tempora periodica æquentur & propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Cor. 4. Si & tempora periodica & velocitates ſint in ratione ſubduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contra.

Corol. 5. Si tempora periodica ſint ut radii & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: & contra.

Corol. 6. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata radiorum & propterea velocitates reciproce in radiorum ratione ſubduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum: & contra.

Corol. 7. Et univerſaliter, ſi tempus periodicum ſit ut Radii R poteſtas quælibet R^n, & propterea velocitas reciproce ut Radii poteſtas R^{n-1}; erit vis centripeta reciproce ut Radii poteſtas R^{2n-1}: & contra.

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex Demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicata. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, & diſtantias corporum a centris pro radiis uſurpando.

Corol. 9. Ex eadem demonſtratione conſequitur etiam, quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvendo tempore quovis deſcribit, medius eſt proportionalis inter diametrum circuli, & deſcenſum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scholium.

Caſus Corollarii ſexti obtinet in corporibus cæleſtibus, (ut ſeorſum collegerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicata ratione diſtantiarum a centris, decrevi fuſius in ſequentibus exponere.

Porro

Porro præcedentis propoſitionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea Gravitatis. Nam ſi corpus in circulo Terræ concentrico vi gravitatis ſuæ revolvatur, hæc gravitas eſt ipſius vis centripeta. Datur autem, ex deſcenſu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore deſcriptus, per hujus Corol. IX. Et hujuſmodi propoſitionibus *Hugenius*, in eximio ſuo Tractatu *de Horologio Oſcillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonſtrari etiam poſſunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis deſcribi intelligatur Polygonum laterum quotcunque. Et ſi corpus, in polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos ſingulos a circulo reflectatur; vis qua ſingulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas: adeoque ſumma virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim: hoc eſt (ſi polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli; id eſt, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium: adeoque, ſi polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis centrifuga, qua corpus urget circulum: & huic æqualis eſt vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum verſus.

PROPOSITIO. V. PROBLEMA I.

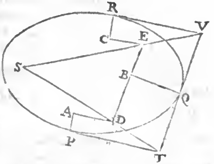
Data quibuſcunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus deſcribit, centrum illud invenire.

Figuram deſcriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T & V. Ad tangentes erigantur perpendicula PA, QB, RC, velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id eſt, ita ut ſit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P, & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q. Per perpendiculorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, EC concurrentes in D & E: Et actæ TD, VE concurrent in centro quæſito S.

Nam

Digitized by Google

Nam perpendicula a centro S in tangentes PT, QT demiſſa (per Corol. 1. Prop. I.) ſunt reciproce, ut velocitates corporis in punctis P & V; adeoque per conſtructionem ut perpendicula AP, BQ directe, id eſt ut perpendicula a puncto D in tangentes demiſſa. Unde facile colligitur quod puncta S, D, T, ſunt in una recta. Et ſimili argumento puncta S, E, V ſunt etiam in una recta; & propterea centrum S in concurſu rectarum TD, VE verſatur. *Q. E. D.*



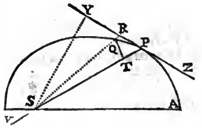
PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in ſpatio non reſiſtente circa centrum immobile in Orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam naſcentem tempore quàm minimo deſcribat, & ſagitta arcus duci intelligatur quæ chordam biſecet, & producta tranſeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut ſagitta directe & tempus bis inverſe.

Nam ſagitta dato tempore eſt ut vis (per Corol. 4 Prop. 1,) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione ſagitta augetur in ratione illa duplicata (per Corol. 2 & 3, Lem. XI,) adeoque eſt ut vis ſemel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut ſagitta directe & tempus bis inverſe. *Q. E. D.*

Idem facile demonſtratur etiam per Corol. 4 Lem. X.

Corol. 1. Si corpus P revolvendo circa centrum S deſcribat lineam curvam APQ, tangat verò recta ZPR curvam illam in puncto quovis P, & ad tangentem ab alio quovis Curvæ puncto Q agatur QR diſtantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad diſtantiam illam SP: vis centripeta erit reciproce ut ſolidum $\frac{SP\,quad. \times QT\,quad.}{QR}$ ſi modo ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas, quæ ultimò fit ubi coeunt puncta P & Q. Nam QR æqualis



 eſt

eſt ſagittæ dupli arcus QP, in cujus medio eſt P, & duplum trianguli SQP ſive $SP \times QT$, tempori quo arcus iſte duplus deſcribitur proportionale eſt, ideoque pro temporis exponente ſcribi poteſt.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta eſt reciprocè ut ſolidum $\frac{STq \times QPq}{QR}$, ſi modo ST perpendiculum ſit a centro virium in Orbis tangentem PR demiſſum. Nam rectangula $ST \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

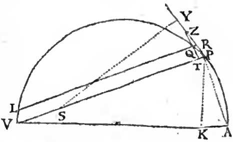
Corol. 3. Si Orbis vel circulus eſt, vel angulum contactus cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum contactus P; & ſi PV chorda ſit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut ſolidum $STq \times PV$. Nam PV eſt $\frac{QPq}{QR}$.

Corol. 4. Iiſdem poſitis, eſt vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverſe. Nam velocitas eſt reciproce ut perpendiculum ST per Corol. 1 Prop. 1.

Corol. 5. Hinc ſi detur figura quævis curvilinea APQ, & in ea detur etiam punctum S ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri poteſt lex vis centripetæ, qua corpus quodvis P a curſu rectilineo perpetuò retractum in figuræ illius perimetro detinebitur eamque revolvendo deſcribet. Nimirum computandum eſt vel ſolidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel ſolidum $STq \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in Problematis ſequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentia Circuli, requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.



Eſto Circuli circumferentia $VQPA$, punctum datum ad quod vis ceu ad centrũ ſuũ tendit S, corpus in circumferentia latum P, locus proximus in quem movebitur Q, & circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV, & acta circuli diametro VA jungatur AP, & ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z,

ac

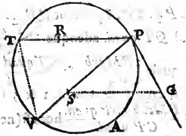
ac denique per punctum Q agatur LR quæ ipſi SP parallela ſit & occurrat tum circulo in L tum tangenti PZ in R. Et ob ſimilia triangula ZQR, ZTP, VPA; erit RP *quad.* hoc eſt QRL ad QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\ quad.}{AV\ quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$ &, punctis P & Q coeuntibus, ſcribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AV\ quad}$ id eſt, (ob datum AV *quad.*) reciproce ut quadratum diſtantiæ ſeu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. *Q.E.I.*

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum ST, & ob ſimilia triangula STP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad ST, ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale ST, & $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale ST *quad.* $\times PV$. Et propterea (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AVq}$ hoc eſt, ob datam AV, reciproce ut $SPq \times PV$ *cub.* *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi punctum datum S ad quod vis centripeta ſemper tendit, locetur in circumferentia hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciproce ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis qua corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut RP *quad.* $\times SP$ ad cubum rectæ SG quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & diſtantiæ corporis a ſecundo virium centro parallela eſt. Nam, per conſtructionem hujus Propoſitionis, vis prior eſt ad vim poſteriorem, ut $RPq \times PT$ *cub.* ad $SPq \times PV$ *cub.*



 id

Digitized by Google

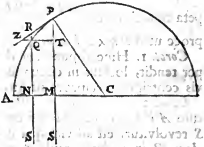
id eſt, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\,cub. \times PV\,cub.}{PT\,cub.}$ ſive (ob ſimilia triangula PSG, TPV) ad $SG\,cub.$

Corol. 3. Vis, qua corpus P in Orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim qua corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut $SP \times RPq$ contentum utique ſub diſtantia corporis a primo virium centro S & quadrato diſtantiæ ejus a ſecundo virium centro R ad cubum rectæ SG quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis a ſecundo virium centro diſtantiæ RP parallela eſt. Nam vires in hoc Orbe, ad ejus punctum quodvis P, eædem ſunt ac in Circulo ejuſdem curvaturæ.

PROPOSITIO. VIII. PROBLEMA. III.

Moveatur corpus in Circulo PQA: *ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*

A Circuli centro C agatur ſemidiameter CA parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in M & N, & jungatur CP. Ob ſimilia triangula CPM, PZT & RZQ eſt CPq ad PMq ut PRq ad QTq & ex natura Circuli PRq æquale eſt rectangulo $QR \times RN + QN$ ſive coeuntibus punctis P, Q rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo eſt CPq ad $PM\,quad.$ ut $QR \times 2PM$ ad $QT\,quad.$ adeoque $\frac{QT\,quad.}{QR}$



æquale $\frac{2PM\,cub.}{CP\,quad.}$, & $\frac{QT\,quad. \times SP\,quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\,cub. \times SP\,qu.}{CP\,quad.}$ Eſt ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2PM\,cub. \times SP\,quad.}{CP\,quad.}$ hoc eſt (neglecta ratione determinata $\frac{2SP\,quad.}{CP\,quad.}$) reciproce ut $PM\,cub.$ *Q. E. I.*

Idem facile colligitur etiam ex Propoſitione præcedente.

Scho-

Scholium.

Et ſimili argumento corpus movebitur in Ellipſi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in Spirali PQS *ſecante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis.*



Detur angulus indefinite parvus PSQ, & ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura $SPQRT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut QT, hoc eſt ut SP. Mutetur jam utcunque angulus PSQ, & recta QR angulum contactus QPR ſubtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipſius PR vel QT. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut SP. Quare $\frac{QTq. \times SPq}{QR}$ eſt ut SP *cub.* adeoque (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut cubus diſtantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Perpendiculum ST in tangentem demiſſum, & circuli Spiralem tangentis chorda PV ſunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP *cub.* eſt ut $STq \times PV$, hoc eſt (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) reciproce ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia, circa datæ Ellipſeos vel Hyperbolæ diametros quaſvis conjugatas deſcripta, eſſe inter ſe æqualia.

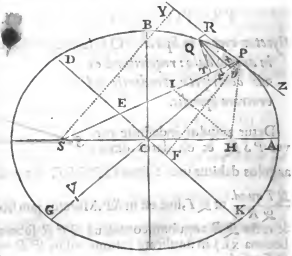
Conſtat ex Conicis.

PRO-

PROPOSITIO X. PROBLEMA. V.

Gyretur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipſeos.

Sunto CA, CB ſemiaxes Ellipſeos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex Conicis) PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula Qvt, PCF) Qv *quad.* eſt ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, PvG ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt, vG ad $\frac{Qt\,quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro Pv, & (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non, punctis P & Q coeuntibus, $2PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in ſe mutuo, fiet $\frac{Qt\,quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Eſt ergo (per Corol. 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id eſt (ob datum $2BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc eſt, directe ut diſtantia PC. *Q. E. I.*



Idem aliter.

In PG ab altera parte puncti t poſita intelligatur tu æqualis ipſi tv; deinde cape uV quæ ſit ad vG ut eſt DC *quad.* ad PC *quad.* Et quoniam ex Conicis eſt Qv *quad.* ad PvG, ut DC *quad.* ad PC *quad:* erit Qv *quad.* æquale $Pv \times uV$. Unde quadratum chordæ

Digitized by Google

dæ arcus PQ erit æquale rectangulo VPv; adeoque Circulus qui tangit Sectionem Conicam in P & tranſit per punctum Q, tranſibit etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & hic circulus ejuſdem erit curvaturæ cum ſectione conica in P, & PV æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis qua corpus P in Ellipſi revolvitur, erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (per Corol. 3 Prop. VI.) hoc eſt (ob datum $2DCq$ in PFq) directe ut PC. *Q. E. I.*

Corol. 1. Eſt igitur vis ut diſtantia corporis a centro Ellipſeos: & viciſſim, ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in Ellipſi centrum habente in centro virium, aut forte in Circulo, in quem utique Ellipſis migrare poteſt.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipſibus ſimilibus æqualia ſunt per Corol. 3 & 8, Prop. IV: in Ellipſibus autem communem habentibus axem majorem, ſunt ad invicem ut Ellipſeon areæ totæ directe & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſe; id eſt, ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverſe; hoc eſt, ut axes illi minores directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverſe; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipſis, centro in infinitum abeunte vertatur in Parabolam; corpus movebitur in hac Parabola; & vis ad centrum infinite diſtans jam tendens evadet æquabilis. Hoc eſt Theorema *Galilæi*. Et ſi coni ſectio Parabolica, inclinatione plani ad conum ſectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam verſa. Et quemadmodum in Circulo vel Ellipſi, ſi vires tendunt ad centrum figuræ in Abſciſſa poſitum, hæ vires augendo vel diminuendo Ordinatas in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis Ordinatarum ad Abſciſſam, ſemper augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro, ſi modo tempora periodica maneant æqualia: ſic etiam in figuris univerſis, ſi Ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in Abſciſſa poſitum tendentes augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro.

SECTIO

Digitized by Google

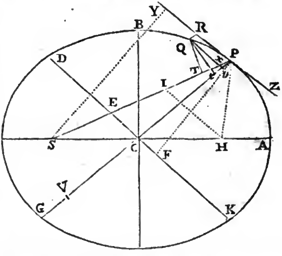
SECTIO III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in Ellipſi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipſeos.

Eſto Ellipſeos umbilicus S. Agatur SP ſecans Ellipſeos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QxPR$. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi majori AC, eo quod acta ab altero Ellipſeos umbilico H linea HI ipſi EC parallela, (ob æquales CS, CH) æquentur ES, EI, adeo ut EP ſemiſumma ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quæ cõjunctim axem totum $2AC$ adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & Ellipſeos latere recto principali (ſeu $\frac{2BC\,quad.}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, id eſt ut PE ſeu AC ad PC; & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv; & GvP ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad*; & (per Corol. 2 Lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad*, punctis Q & P coeuntibus, eſt ratio æqualitatis; & Qx *quad.* ſeu Qv *quad.* eſt ad QT *quad.* ut EP *quad.* ad PF *quad*, id eſt ut CA *quad.* ad PF *quad.* ſive (per Lem XII.) ut CD *quad.* ad CB *quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad QT *quad.* ut $AC \times L \times PCq. \times CDq.$ ſeu $2CBq. \times PCq. \times CDq.$ ad $PC \times Gv \times CDq. \times CBq.$ ſive ut $2PC$ ad Gv. Sed,



Sed,punctis $\mathcal{Q}$ & P coeuntibus,æquātur $2\,PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times \mathcal{Q}R$ & $\mathcal{Q}T$ *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{\mathcal{Q}R}$ & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq \times \mathcal{Q}Tq}{\mathcal{Q}R}$. Ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce eſt ut $L \times SPq$. id eſt, reciproce in ratione duplicata diſtantiæ SP. *Q.E.I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum Ellipſeos tendens, qua corpus P in Ellipſi illa revolvi poteſt, ſit (per Corol. 1 Prop. X) ut CP diſtantia corporis ab Ellipſeos centro C; ducatur CE parallela Ellipſeos tangenti PR: & vis qua corpus idem P, circum aliud quodvis Ellipſeos punctum S revolvi poteſt, ſi CE & PS concurrant in E, erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (per Corol. 3 Prop. VII,) hoc eſt, ſi punctum S ſit umbilicus Ellipſeos, adeoque PE detur, ut SPq reciproce. *Q.E.I.*

Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & uſum ejus in ſequentibus, non pigebit caſus ceteros demonſtratione confirmare.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA. VII.

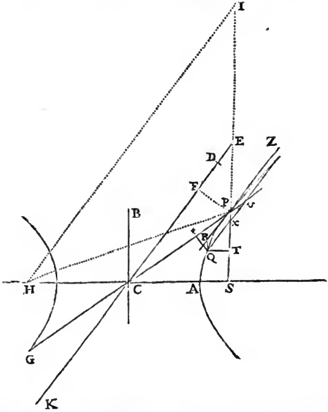
Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB ſemi-axes Hyperbolæ; PG, KD diametri conjugatæ; PF, $\mathcal{Q}t$ perpendicula ad diametros; & $\mathcal{Q}v$ ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP ſecans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam $\mathcal{Q}v$ in x, & compleatur parallelogrammum $\mathcal{Q}RPx$. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi tranſverſo AC, eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico H linea HI ipſi EC parallela, ob æquales CS, CH, æquentur ES, EI; adeo ut EP ſemidifferentia ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quarum differentia axem totum $2\,AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis $\mathcal{Q}T$. Et Hyperbolæ latere recto principali (ſeu $\frac{2\,BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times \mathcal{Q}R$ ad $L \times Pv$ ut $\mathcal{Q}R$ ad Pv, id eſt, ut PE ſeu AC ad PC; Et $L \times Pv$ ad $Gv\,P$ ut L ad

 Gv;

Digitized by Google

Gv; & GvP ad Qv *quad.* ut PCq. ad CDq; & (per Corol. 2. Lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* ſeu Qv *quad.* eſt ad QTq. ut EPq. ad PFq, id eſt ut CAq, ad PFq, ſive (per Lem. XII.) ut CDq, ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq. ut $AC \times L \times PCq \times CDq$ ſeu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CB$ *quad.* ſive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis P & Q coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$. & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1



& 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce eſt ut $L \times SPq$, id eſt reciproce in ratione duplicata diſtantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem

Digitized by Google

Idem aliter.

Inveniatur vis quæ tendit ab Hyperbolæ centro *C*. Prodibit hæc diſtantiæ *CP* proportionalis. Inde vero (per Corol. 3 Prop. VII.) vis ad umbilicum *S* tendens erit ut $\frac{PE\,cub}{SPq}$, hoc eſt, ob datam *PE*, reciproce ut *SPq*. *Q.E.I.*

Eodem modo demonſtratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam verſa, movebitur in Hyperbola conjugata.

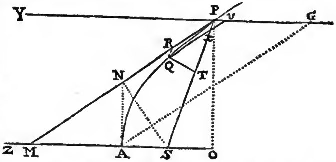
LEMMA XIII.

Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, eſt quadruplum diſtantiæ verticis illius ab umbilico figuræ. Patet ex Conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium eſt proportionale inter diſtantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim *AQP* Parabola, *S* umbilicus ejus, *A* vertex principalis *P* punctum contactus, *PO* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *PM* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *SN*, linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *AN*, & ob æquales *MS* & *SP*, *MN* & *NP*, *MA* & *AO*, parallelæ erunt rectæ *AN* & *OP*, & inde triangulum *SAN* rectangulum erit ad *A* & ſimile triangulis æqualibus *SNM*, *SNP*: Ergo *PS* eſt ad *SN*, ut *SN* ad *SA*. *Q.E.D.*



Corol. 1. *PSq.* eſt ad *SNq.* ut *PS* ad *SA*.

Corol. 2. Et ob datam *SA*, eſt *SNq.* ut *PS*.

 Corol.

Digitized by Google

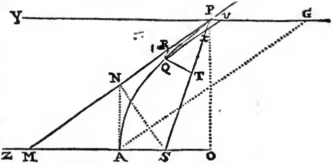
De Motu Corporum

Corol. 3. Et concurſus tangentis cujuſvis PM cum recta SN, quæ ab umbilico in ipſam perpendicularis eſt, incidit in rectam AN, quæ Parabolam tangit in vertice principali.

PROPOSITIO. XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat conſtructio Lemmatis, ſitque P corpus in perimetro Parabolæ, & a loco Q in quem corpus proxime movetur, age ipſi SP parallelam QR & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam & occurrentem tum diametro YPG in v, tum diſtantiæ SP in x. Jam ob ſimilia triangula Pxv, SPM & æqualia unius latera SM, SP, æqualia ſunt alterius latera Px ſeu QR & Pv. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ Qv æquale eſt rectangulo ſub latere recto & ſegmento diametri Pv, id eſt (per Lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, ſeu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx per (per Corol. 2 Lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in caſu, æquale eſt rectangulo $4PS \times QR$. Eſt autem (ob ſimilia triangula QxT, SPN) $Qxq.$ ad $QTq.$ ut $PSq.$ ad $SNq.$ hoc eſt (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut PS ad SA, id eſt ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) $QTq.$ & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq.}{QR}$, & fiet $\frac{SPq. \times QTq.}{QR}$ æquale $SPq. \times 4SA$: & propterea (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut $SPq. \times 4SA$, id eſt, ob datam $4SA$, reciproce in duplicata ratione diſtantiæ SP. *Q. E. I.*



Corol.

Digitized by Google

Corol. 1. Ex tribus noviſſimis Propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis *P*, ſecundum lineam quamvis rectam *P R*, quacunque cum velocitate exeat de loco *P*, & vi centripeta quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico & puncto contactus & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio Conica quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta: & Orbes duo ſe mutuo tangentes, eadem vi centripeta deſcribi non poſſunt.

Corol. 2. Si velocitas, quacum corpus exit de loco ſuo *P*, ea ſit, qua lineola *P R* in minima aliqua temporis particula deſcribi poſſit, & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium *QR*: movebitur hoc corpus in Conica aliqua ſectione, cujus latus rectum principale eſt quantitas illa $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi lineolæ *P R*, *Q R* in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipſin, & caſum excipio ubi corpus recta deſcendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciproce in duplicata ratione diſtantiæ locorum a centro; dico quod Orbium Latera recta principalia ſunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore deſcribunt.

Nam, per Corol. 2. Prop. XIII, Latus rectum *L* æquale eſt quantitati $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi coeunt puncta *P* & *Q*. Sed linea minima *QR*, dato tempore, eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per Hypotheſin) reciproce ut SPq. Ergo $\frac{QTq.}{QR}$ eſt ut $QTq. \times SPq.$ hoc eſt, latus rectum *L* in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. *Q. E. D.*

Corol.

Digitized by Google

Corol. Hinc Ellipſeos area tota, eique proportionale rectangulum ſub axibus, eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione lateris recti & ratione temporis periodici. Namque area tota eſt ut area $QT \times SP$ ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iiſdem poſitis, dico quod Tempora periodica in Ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicata majorum axium.

Namque axis minor eſt medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque adeo rectangulum ſub axibus eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione lateris recti & ſeſquiplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Prop. XIV. eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique ſubduplicata ratio lateris recti, & manebit ſeſquiplicata ratio majoris axis æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipſibus eadem ac in Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipſeon.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

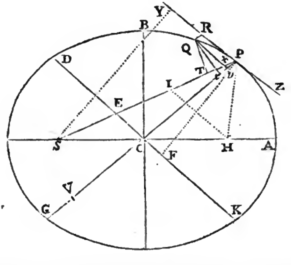
Iiſdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant Orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod Velocitates corporum ſunt in ratione compoſita ex ratione perpendiculorum inverſe & ſubduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum ST & velocitas corporis P erit reciproce in ſubduplicata ratione quantitatis $\frac{STq}{L}$. Nam velocitas illa eſt ut arcus quam minimus PQ in data temporis particula deſcriptus, hoc eſt (per Lem. VII.) ut tangens PR, id eſt (ob proportionales PR ad QT & SP ad ST) ut $\frac{SP \times QT}{ST}$, ſive ut ST reciproce & $SP \times QT$ directe; eſtque

$SP \times QT$

Digitized by Google

$SP \times QT$ ut area dato tempore deſcripta, id eſt, per Prop. XIV. in ſubduplicata ratione lateris recti. *Q. E. D.*



Corol. 1. Latera recta principalia ſunt in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi diſtantiis, ſunt in ratione compoſita ex ratione diſtantiarum inverſe & ſubduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ.

Corol. 3. Ideoque velocitas in Conica ſectione, in maxima vel minima ab umbilico diſtantia, eſt ad velocitatem in Circulo in eadem à centro diſtantia, in ſubduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam diſtantiam.

Corol. 4. Corporum in Ellipſibus gyrantium velocitates in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi ſunt eædem quæ corporum gyrantium in Circulis ad eaſdem diſtantias; hoc eſt (per Corol 6. Prop. IV.) reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores; & hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverſe cum ſubduplicata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio ſubduplicata diſtantiarum inverſe.

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diverſis, quarum

latera

Digitized by Google

latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciproce ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas eſt reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in Ellipſi magis variatur, in Hyperbola minus, quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. XIV.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem Parabolæ eſt in ſubduplicata ratione diſtantiæ. In Hyperbola perpendiculum minus variatur, in Ellipſi magis.

Corol. 7. In Parabola, velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam, eſt ad velocitatem corporis revolventis in Circulo ad eandem a centro diſtantiam, in ſubduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipſi minor eſt, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium ſecundum, velocitas in vertice Parabolæ eſt in hac ratione, & per Corollaria ſexta hujus & Propoſitionis quartæ, ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam diſtantiam, in Ellipſi minor eſt, in Hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica eſt ad velocitatem gyrantis in Circulo in diſtantia dimidii lateris recti principalis Sectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem Sectionis demiſſum. Patet per Corollarium quintum.

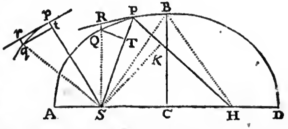
Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc Circulo ſit ad velocitatem gyrantis in Circulo quovis alio, reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica ſectione ad velocitatem gyrantis in Circulo in eadem diſtantia, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem principalis lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA. IX.

Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtanſtantiæ locorum a centro, & quod vis illius quantitas abſoluta ſit cognita; requiritur Linea quam corpus deſcribit, de loco dato, cum data velocitate, ſecundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea ſit qua corpus *p* in orbita quavis data *p q* gyretur, & cognoſcatur hujus velocitas in loco *p*. De

De loco P, ſecundum lineam PR, exeat corpus P, cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Coniſectionem PQ. Hanc igitur recta PR tanget in P. Tangat itidem recta aliqua pr Orbitam pq in p, & ſi ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Prop. XVI.) latus rectum principale Coniſectionis ad latus rectum principale Orbitæ, in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atque adeo datur. Sit iſtud L. Datur præterea Coniſectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH, & dabitur poſitione linea PH, in qua umbilicus alter H locatur. Demiſſo ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur ſemiaxis conjugatus BC, & erit $SPq. - 2KPH + PHq. = SHq. = 4CHq. = 4BHq - 4BCq. = \overline{SP+PH}$: *quad.* $- L \times \overline{SP+PH} = SPq. + 2SPH + PHq. - L \times \overline{SP+PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP+PH}$, & fiet $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, ſeu $SP + PH$, ad PH, ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam poſitione. Nimirum ſi ea corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS, adeoque figura erit Ellipſis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta ſit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit, & propterea figura erit Parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod ſi corpus majori adhuc cum velocitate de loco ſuo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis, adeoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. *Q. E. I.*



Corol. 1. Hinc in omni Coniſectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH, ad DS ut eſt latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L,

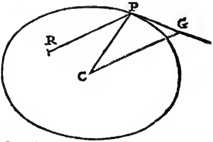
in caſu hujus Corollarii, fit $DS+DH$ ad DH ut $4DS$ ad L, & diviſim DS ad DH ut $4DS-L$ ad L.

Corol. 2. Unde ſi datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur Orbita expedite, capiendo ſcilicet latus rectum ejus, ad duplam diſtantiam DS, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in Circulo, ad diſtantiam DS, gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

Corol. 3. Hinc etiam ſi corpus moveatur in Sectione quacunque Conica, & ex Orbe ſuo impulſu quocunque exturbetur; cognoſci poteſt Orbis in quo poſtea curſum ſuum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulſus ſolus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulſus loco, ſecundum rectam poſitione datam, exibit.

Corol. 4. Et ſi corpus illud vi aliqua extrinſecus impreſſa continuo perturbetur, innoteſcet curſus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibuſdam inducit, & ex ſeriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æſtimando.

Scholium.



Si corpus P vi centripeta ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuſcunque Sectionis conicæ cujus centrum ſit C, & requiratur Lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & Orbis tangenti PG occurrens in G; & vis illa (per Corol. 1 & Schol. Prop. X, & Corol. 3 Prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$

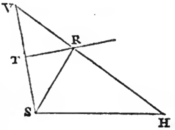
SECTIO

SECTIO IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab Ellipſeos vel Hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis ſit axi principali figuræ, altera* SV *a perpendiculo* TR *in ſe demiſſo biſecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *ſectionem Conicam alicubi tanget: & contra, ſi tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*



Secet enim perpendiculum *TR* rectam *HV* productam, ſi opus fuerit, in *R*; & jungatur *SR*. Ob æquales *TS*, *TV*, æquales erunt & rectæ *SR*, *VR* & anguli *TRS*, *TRV*. Unde punctum *R* erit ad Sectionem Conicam, & perpendiculum *TR* tanget eandem: & contra. *Q. E. D.*

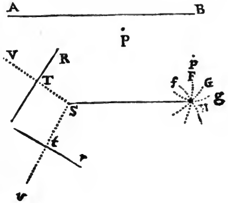
PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus deſcribere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data, & rectas poſitione datas contingent.

Sit *S* communis umbilicus figurarum; *AB* longitudo axis principalis Trajectoriæ cujuſvis; *P* punctum per quod Trajectoria debet tranſire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro *P* intervallo $AB - SP$, ſi orbita ſit Ellipſis, vel $AB + SP$, ſi ea ſit Hyperbola, deſcribatur circulus *HG*. Ad tangentem *TR* demittatur perpendiculum *ST*, & producatur idem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*; centroque *V* & intervallo *AB* deſcribatur circulus *FH*. Hac

Digitized by Google

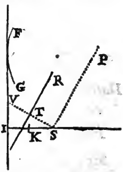
methodo ſive dentur duo puncta P, p, ſive duæ tangentes TR, tr, ſive punctum P & tangens TR, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit H eorum interſectio communis, & umbilicis S,H, axe illo dato deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria deſcripta (eo quod $PH + SP$ in Ellipſi, & $PH - SP$ in Hyperbola æquatur axi) tranſibit per punctum P, & (per Lemma ſuperius) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo P,p, vel tanget rectas duas TR, tr. *Q. E. F.*



PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens Trajectoriæ deſcribendæ. Centro P, intervallo PS deſcribe circulum FG. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST, & produc eam ad V, ut ſit TV æqualis ST. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus fg, ſi datur alterum punctum p; vel inveniendum alterum punctum v, ſi datur altera tangens tr; dein ducenda recta IF quæ tangat duos circulos FG, fg ſi dantur duo puncta P, p, vel tranſeat per duo puncta V, v, ſi dantur duæ tangentes TR, tr, vel tangat circulum FG & tranſeat per punctum V, ſi datur punctum P & tangens TR. Ad FI demitte perpendicularem SI, eamque biſeca in K; & axe SK, vertice principali K deſcribatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola, ob æquales SK & IK, SP & FP, tranſibit per punctum P; & (per Lemmatis XIV. Corol. 3.) ob æquales ST & TV & angulum rectum STR, tanget rectam TR. *Q. E. F.*

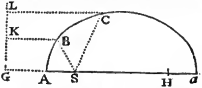


PRO-

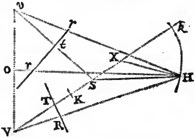
PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.

Caſ. 1. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit Trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam Trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, deſcribe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eoſdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemque ſeca in *A* & *a*, ita ut ſit *SA* ad *AG* & *Sa* ad *aG*, ut eſt *SB* ad *BK*, & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter Figuræ deſcriptæ, & cum ſit *SA* ad *AG* ut *Sa* ad *aG*, erit diviſim $Sa - SA$ ſeu *SH* ad $aG - AG$ ſeu *Aa* in eadem ratione, adeoque in ratione quam habet axis principalis Figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea Figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. Cumque ſint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eadem ratione, tranſibit hæc Figura per puncta *B*, *C*, ut ex Conicis manifeſtum eſt.

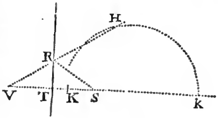


Caſ. 2. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut ſint *TV*, *tv* æquales *TS*, *tS*. Biſeca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *OH*, rectamque *VS* infinite productam ſeca in *K* & *k* ita, ut ſit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut eſt Trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro *Kk* deſcribatur circulus ſecans *OH* in *H*; & umbilicis *S*, *H*, axe principali ipſam *VH* æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam biſeca *Kk* in *X*, & junge *HX*, *HS*, *HV*, *Hv*. Quoniam eſt *VK* ad *KS* ut *Vk* ad *kS*; & compoſite ut $VK + Vk$ ad $KS + kS$; diviſimque ut



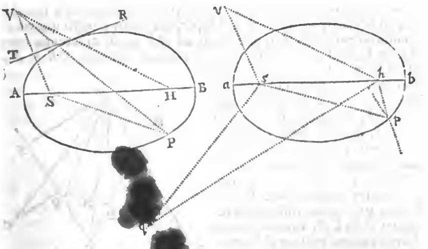
ut $Vk - VK$ ad $kS - KS$, id eſt ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, adeoque ut VX ad HX & HX ad SX, ſimilia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, adeoque ut VK ad KS. Habet igitur Trajectoriæ deſcriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam SH, quam habet Trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cum VH, vH æquentur axi principali, & VS, vS a rectis TR, tr perpendiculariter biſecentur, liquet, ex Lemmate xv, rectas illas Trajectoriam deſcriptam tangere. *Q. E. F.*

Cas. 3. Dato umbilico S deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectam TR tanget in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem ST, & produc eandem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Junge VR, & rectam VS infinite productam ſeca in K & k, ita ut ſit VK ad SK & Vk ad Sk ut Ellipſeos deſcribendæ axis principalis ad diſtantiam umbilicorum; circuloque ſuper diametro Kk deſcripto, ſecetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe principali rectam VH æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Namque VH eſſe ad SH ut VK ad SK, atque adeo ut axis principalis Trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, patet ex demonſtratis in Caſu ſecundo, & propterea Trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribenda; rectam vero TR qua angulus VRS biſecatur, tangere Trajectoriam in puncto R, patet ex Conicis. *Q.E.F.*



Cas. 4. Circa umbilicum S deſcribenda jam ſit Trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, tranſeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque ſimilis ſit Figuræ apb, axe principali ab & umbilicis s, h deſcriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Angulis autem VSP, SVP fac angulos hsq, shq æquales; centroque q & intervallo quod ſit ad ab ut SP ad VS deſcribe circulum ſecantem Figuram apb in p. Junge sp & age SH quæ ſit ad sh ut eſt SP ad sp, quæque angulum PSH angulo psh & angulum VSH angulo psq æquales conſtituat. Denique umbilicis S, H, & axe principali AB diſtantiam VH æquante, deſcribatur ſectio Conica. Dico factum. Nam ſi agatur sv quæ ſit ad sp ut eſt sh ad

ad sq, quæque conſtituat angulum vsp angulo hsq & angulum vsh angulo psq æquales, triangula svh, spq erunt ſimilia, & propterea vh erit ad pq ut eſt sh ad sq, id eſt (ob ſimilia triangula



VSP, hsq) ut eſt V[illegible]SP ſeu ab ad pq. Æquantur ergo vh & ab. Porro ob ſimilia triangula VSH. vsh, eſt VH ad SH ut vh ad sh, id eſt, [illegible] Conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum in[illegible] axis ab ad umbilicorum intervallum sh; & propte[illegible] jam deſcripta ſimilis eſt Figuræ apb. Tranſit autem h[illegible] per punctum P, eo quod triangulum PSH ſimile ſit t[illegible] psh; & quia VH æquatur ipſius axi & VS biſecatur perpendiculariter a recta TR, tangit eadem rectam TR. *Q. E. F.*

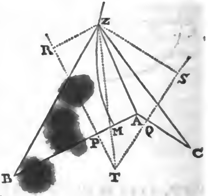
LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ ſunt.

Cas. 1. Sunto puncta illa data A, B, C & punctum quartum Z, quod invenire oportet; Ob datam differentiam linearum AZ, BZ, locabitur punctum Z in Hyperbola cujus umbilici ſunt A & B, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille MN. Cape PM. ad

De Motu Corporum

ad MA ut eſt MN ad AB, & erecta PR perpendiculari ad AB, demiſſaque ZR perpendiculari ad PR; erit, ex natura hujus Hyperbolæ, ZR ad AZ ut eſt MN ad AB. Simili diſcurſu punctum Z locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici ſunt A, C & principalis axis differentia inter AZ & CZ, ducique poteſt QS ipſi AC perpendicularis, ad quam ſi ab Hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS, hæc fuerit ad AZ ut eſt differentia inter AZ & CZ ad AC. Dantur ergo rationes ipſarum ZR & ZS ad AZ, & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideoque ſi rectæ RP, SQ concurrant in T, & agatur TZ, figura $TRZS$, dabitur ſpecie, & recta TZ in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur poſitione. Eadem methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici ſunt B & C & axis principalis differentia rectarum BZ, CZ, inveniri poteſt alia recta in qua pũctum Z locatur. Habitis autem duobus Locis rectilineis, habetur punctum quæſitum Z in eorum interſectione. *Q.E.I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, pu[illegible] AZ & BZ æquantur, punctum Z locabitur in perpendicul[illegible]nte diſtantiam AB, & locus alius rectilineus invenietur u[illegible] *E.I.*

Cas. 3. Si omnes tres æquantu[illegible] punctum Z in centro Circuli per puncta A, B, C tranſ[illegible]. *E. I.*

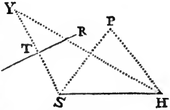
Solvitur etiam hoc Lemma prob[illegible]cum per Librum Tactionum *Apollonii* a *Vieta* reſtitutum.

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum deſcribere, quæ tranſibit per puncta data & rectas poſitione datas continget.

Detur umbilicus S, punctum P, & tangens TR, & inveniendus ſit umbilicus alter H. Ad tangentem demitte perpendiculum ST, & produc idem ad Y, ut ſit TY æqualis ST, & erit YH æqualis axi principali. Junge SP, HP, & erit SP differentia inter HP & axem principalem. Hoc modo ſi dentur plures tangentes

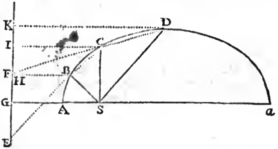
tes TR, vel plura puncta P, devenietur ſemper ad lineas totidem TH, vel PH, a dictis punctis T vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iiſdem, atque adeo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ



vel eſt TH; vel, ſi Trajectoria Ellipſis eſt, $PH + SP$; ſin Hyperbola, $PH - SP$) habetur Trajectoria. *Q. E. I.*

Scholium.

Caſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditius. Dentur puncta B, C, D. Junctas BC, CD produc ad E, F, ut ſit EB ad EC ut SB ad SC, & FC ad FD ut SC ad SD. Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH, inque GS infinite producta cape GA ad AS & Ga ad aS ut eſt HB ad BS; & erit A vertex, & Aa axis principalis Trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis, vel minor fuerit quam AS, erit Ellipſis, Parabola vel Hyperbola; puncto a in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ GF cum puncto A; in ſecundo caſu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GF. Nam ſi demittantur ad GF perpendicula



CI, DK; erit IC ad HB ut EC ad EB, hoc eſt, ut SC ad SB; & viciſſim IC ad SC ut HB ad SB ſive ut GA ad SA. Et ſimili argumento probabitur eſſe KD ad SD in eadem ratione. Jacent ergo puncta B, C, D in Coniſectione circa umbilicum S ita deſcripta, ut rectæ omnes ab umbilico S ad ſingula Sectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula a punctis iiſdem ad rectam GF demiſſa in data illa ratione.

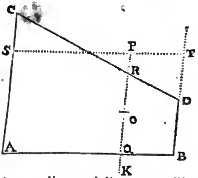
Methodo haud multum diſſimili hujus problematis ſolutionem tradit Clariſſimus Geometra *de la Hire*, Conicorum ſuorum Lib. VIII. Prop. XXV.

SECTIO V.

Inventio Orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

Si a datæ Conicæ Sectionis puncto quovis P, *ad Trapezii alicujus* ABDC, *in Conica illa ſectione inſcripti, latera quatuor infinite producta* AB, CD, AC, DB, *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, ſingulæ ad ſingula: rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera* PQ × PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera oppoſita* PS × PT *in data ratione.*

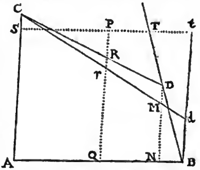


Cas. 1. Ponamus primo lineas ad oppoſita latera ductas parallelas eſſe alterutri reliquorum laterum, puta *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintque inſuper latera duo ex oppoſitis, puta *AC* & *BD*, ſibi invicem parallela. Et recta quæ biſecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ ſectionis, & biſecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* biſecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K* ut ſit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, *P* & *K* ſint ad Conicam ſectionem, & *PK* ſecet *AB* in dato angulo, erit (per Prop. 17 & 18 Lib. III Conicorum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in data ratione. Sed *QK* & *PR* æquales ſunt, utpote æqualium *OK*, *OP*, & *OQ*, *OR* differentiæ, & inde etiam rectangula *PQK* & *PQ* × *PR* æqualia ſunt; atque adeo rectangulum *PQ* × *PR* eſt ad rectangulum *AQB*, hoc eſt ad rectangulum *PS* × *PT* in data ratione. *Q.E.D.*

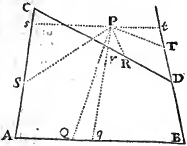
Cas.

Digitized by Google

Caſ. 2. Ponamus jam Trapezii latera oppoſita *AC* & *BD* non eſſe parallela. Age *Bd* parallelam *AC* & occurrentem tum rectæ *ST* in *t*, tum Conicæ ſectioni in *d*. Junge *Cd* ſecantem *PQ* in *r*, & ipſi *PQ* parallelam age *DM* ſecantem *Cd* in *M* & *AB* in *N*. Jam ob ſimilia triangula *BTt*, *DBN*; eſt *Bt* ſeu *PQ* ad *Tt* ut *DN* ad *NB*. Sic & *Rr* eſt ad *AQ* ſeu *PS* ut *DM* ad *AN*. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum *PQ* in *Rr* eſt ad rectangulum *PS* in *Tt*, ita rectangulum *NDM* eſt ad rectangulum *ANB*, & (per Caſ. 1) ita rectangulum *PQ* in *Pr* eſt ad rectangulum *PS* in *Pt*, ac diviſim ita rectangulum *PQ*×*PR* eſt ad rectangulum *PS*×*PT*. *Q. E. D.*



Caſ. 3. Ponamus denique lineas quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* non eſſe parallelas lateribus *AC*, *AB*, ſed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age *Pq*, *Pr* parallelas ipſi *AC*; & *Ps*, *Pt* parallelas ipſi *AB*; & propter datos angulos triangulorum *PQq*, *PRr*, *PSs*, *PTt*, dabuntur rationes *PQ* ad *Pq*, *PR* ad *Pr*, *PS* ad *Ps*, & *PT* ad *Pt*; atque adeo rationes compoſitæ *PQ*×*PR* ad *Pq*×*Pr*, & *PS*×*PT* ad *Ps*×*Pt*. Sed, per ſuperius demonſtrata, ratio *Pq*×*Pr* ad *Ps*×*Pt* data eſt: Ergo & ratio *PQ*×*PR* ad *PS*×*PT*. *Q. E. D.*



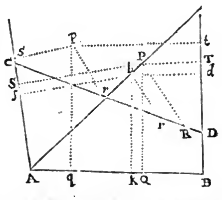
LEMMA XVIII.

Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera Trapezii PQ×PR *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS×PT *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam ſectionem circa Trapezium deſcriptam.*

K 2 Per

Digitized by Google

Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P, puncta p, concipe Conicam ſectionem deſcribi: dico punctum P hanc ſemper tangere. Si negas, junge AP ſecantem hanc Conicam ſectionem alibi quam in P, ſi fieri poteſt, puta in b. Ergo ſi ab his punctis p & b ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ pq, pr, ps, pt & $bk, br, bſ, bd$; erit ut $bk \times br$ ad $bſ \times bd$ ita (per Lem. XVII) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per Hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Eſt & propter ſimilitudinem Trapeziorum $bkAſ$, $PQAS$, ut bk ad $bſ$ ita PQ ad PS. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correſpondentes hujus, erit br ad bd ut PR ad PT. Ergo Trapezia æquiangula $Drbd$, $DRPT$ ſimilia ſunt, & eorum diagonales Db, DP propterea coincidunt. Incidit itaque b in interſectionem rectarum AP, DP adeoque coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunque ſumatur, incidit in aſſignatam Conicam ſectionem. *Q. E. D.*



Corol. Hinc ſi rectæ tres PQ, PR, PS a puncto communi P ad alias totidem poſitione datas rectas AB, CD, AC, ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, ſitque rectangulum ſub duabus ductis $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ PS *quad.* in data ratione: punctum P, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in ſectione Conica quæ tangit lineas AB, CD in A & C; & contra. Nam coeat linea BD cum linea AC manente poſitione trium AB, CD, AC; dein coeat etiam linea PT cum linea PS: & rectangulum $PS \times PT$ evadet PS *quad.* rectæque AB, CD quæ curvam in punctis A & B, C & D ſecabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius ſecare poſſunt ſed tantum tangent.

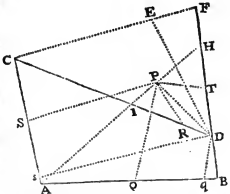
Scholium.

Nomen Conicæ ſectionis in hoc Lemmate late ſumitur, ita ut ſectio tam Rectilinea per verticem Coni tranſiens, quam Circularis baſi parallela includatur. Nam ſi punctum p incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor A, B, C, D junguntur, Conica ſectio verte-

vertetur in geminas Rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera eſt recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si Trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitque rectangulum ſub duabus ductis *PQ*×*PR* æquale rectangulo ſub duabus aliis *PS*×*PT*, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis & rectangulum ſub duabus ductis *PQ*×*PR* ſit ad rectangulum ſub aliis duabus *PS*×*PT* ut rectangulum ſub ſinubus angulorum *S*, *T*, in quibus duæ ultimæ *PS*, *PT* ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum *Q*, *R*, in quibus duæ primæ *PQ*, *PR* ducuntur. Cæteris in caſibus Locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii *ABCD* ſubſtitui poteſt Quadrilaterum cujus latera duo oppoſita ſe mutuo inſtar diagonalium decuſſant. Sed & e punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* poſſunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in caſu Sectio Conica tranſibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEMMA XIX.

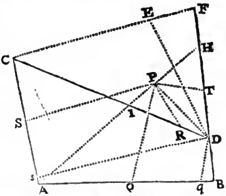
Invenire punctũ P, *a quo ſi rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT, *ad alias totidem poſitione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *ſingulæ ad ſingulas in datis angulis ducantur, rectangulũ ſub duabus ductis*, PQ×PR, *ſit ad rectangulum ſub aliis duabus*, PS×PT, *in data ratione.*



Lineæ *AB*, *CD*, ad quas rectæ duæ *PQ*, *PR*, unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus poſitione datis lineis in punctis *A*, *B*, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH*, in qua velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppoſitas *BD*, *CD*, nimirum *BD* in *H* & *CD* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA*

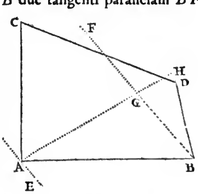
ad

ad *PS*, adeoque ratio *PQ* ad *PS*. Auferendo hanc a data ratione *PQ*×*PR* ad *PS*×*PT*, dabitur ratio *PR* ad *PT*, & addendo datas rationes *PI* ad *PR*, & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH* atque adeo punctum *P*. *Q. E. I.*



Corol. 1. Hinc etiam ad Loci punctorum infinitorum *P* punctum quodvis *D* tangens duci poteſt. Nam chorda *PD* ubi puncta *P* ac *D* conveniunt, hoc eſt, ubi *AH* ducitur per punctum *D*, tangens evadit. Quo in caſu, ultima ratio evaneſcentium *IP* & *PH* invenietur ut ſupra. Ipſi igitur *AD* duc parallelam *CF*, occurrentem *BD* in *F*, & in ea ultima ratione ſectam in *E*, & *DE* tangens erit, propterea quod *CF* & evaneſcens *IH* parallelæ ſunt, & in *E* & *P* ſimiliter ſectæ.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium *P* definiri poteſt. Per quodvis punctorum *A*, *B*, *C*, *D*, puta *A*, duc Loci tangentem *AE* & per aliud quodvis punctum *B* duc tangenti parallelam *BF* occurrentem Loco in *F*. Invenietur autem punctum *F* per Lem. XIX. Biſeca *BF* in *G*, & acta indefinita *AG* erit poſitio diametri ad quam *BG* & *FG* ordinatim applicantur. Hæc *AG* occurrat Loco in *H*, & erit *AH* diameter ſive latus tranſverſum, ad quod latus rectum erit ut *BGq.* ad *AGH*. Si *AG* nullibi occurrit Loco, linea *AH* exiſtente infinita, Locus erit Parabola & latus rectum ejus ad diametrum *AG* pertinens erit $\frac{BGq.}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, Locus Hyperbola erit ubi puncta *A* & *H* ſita ſunt ad eaſdem partes ipſius *G*: & Ellipſis, ubi *G* intermedium eſt, niſi forte angulus *AGB* rectus ſit & inſuper *BG quad.* æquale rectangulo *AGH*, quo in caſu Circulus habebitur.



Atque ita Problematis Veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incæpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, ſed compoſitio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

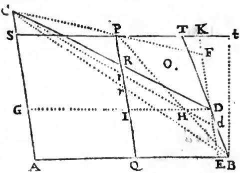
LEM-

Digitized by Google

LEMMA XX.

Si Parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppoſitis* A *&* P *tangit ſectionem quamvis Conicam in punctis* A *&* P; *&, lateribus unius angulorum illorum infinite productis* AQ, AS, *occurrit eidem ſectioni Conicæ in* B *&* C; *a punctis autem occurſuum* B *&* C *ad quintum quodvis ſectionis Conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T *&* R: *erunt ſemper abſciſſæ laterum partes* PR *&* PT *ad invicem in data ratione. Et contra, ſi partes illæ abſciſſæ ſunt ad invicem in data ratione, punctum* D *tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *tranſeuntem.*

Cas. 1. Jungantur *BP*, *CP* & a puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipſi *AB* parallela ſit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela ſit ipſi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (per Lemma XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data. Sed eſt *PQ* ad *DE* (ſeu *IQ*) ut *PB* ad *HB*, adeoque ut *PT* ad *DH*; &



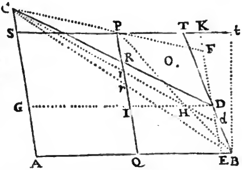
viciſſim *PQ* ad *PT* ut *DE* ad *DH*. Eſt & *PR* ad *DF* ut *RC* ad *DC*, adeoque ut (*IG* vel) *PS* ad *DG*, & viciſſim *PR* ad *PS* ut *DF* ad *DG*; & conjunctis rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque adeo in data ratione. Sed dantur *PQ* & *PS* & propterea ratio *PR* ad *PT* datur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Quod ſi *PR* & *PT* ponantur in data ratione ad invicem, tum ſimili ratiocinio regrediendo, ſequetur eſſe rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data, adeoque punctum *D* (per Lemma XVIII.) contingere Conicam ſectionem tranſeuntem per puncta *A*, *B*, *C*, *P*. *Q. E. D.*

Corol.

Digitized by Google

Corol. 1. Hinc ſi agatur *BC* ſecans *PQ* in *r*, & in *PT* capiatur *Pt* in ratione ad *Pr* quam habet *PT* ad *PR*: erit *Bt* tangens Conicæ ſectionis ad punctum *B*. Nam concipe punctum *D* coire cum puncto *B* ita ut, chorda *BD* evaneſcente, *BT* tangens evadat; & *CD* ac *BT* coincident cum *CB* & *Bt*.



Corol. 2. Et vice verſa ſi *Bt* ſit tangens, & ad quodvis Conicæ ſectionis punctum *D* conveniant *BD*, *CD*; erit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*. Et contra, ſi ſit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*: convenient *BD*, *CD* ad Conicæ Sectionis puncum aliquod *D*.

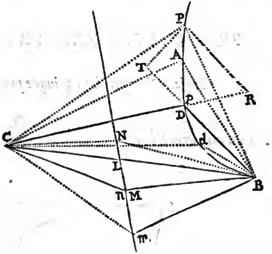
Corol. 3. Conica ſectio non ſecat Conicam ſectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, ſi fieri poteſt, tranſeant duæ Conicæ ſectiones per quinque puncta *A, B, C, P, O*; eaſque ſecet recta *BD* in punctis *D, d*, & ipſam *PQ* ſecet recta *Cd* in r. Ergo *PR* eſt ad *PT* ut *P*r ad *PT*; unde *PR* & *P*r ſibi invicem æquantur, contra Hypotheſin.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C, *ceu polos ductæ, concurſu ſuo* M *deſcribant tertiam poſitione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur; dico quod hæ duæ* BD, CD *concurſu ſuo* D *deſcribent ſectionem Conicam per puncta* B, C *tranſeuntem. Et vice verſa, ſi rectæ* BD, CD *concurſu ſuo* D *deſcribant Sectionem Conicam per data puncta* B, C, A *tranſeuntem, & ſit angulus* DBM *ſemper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *ſemper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam poſitione datam.*

Nam

Nam in recta *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*, incidat punctum mobile *D* in immotum *P*. Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipſis *BD*, *CD* in *T* & *R*, & facientes angulum *BPT* æqualem angulo dato *BNM*, & angulum *CPR* æqualem angulo dato *CNM*. Cum ergo (ex Hypotheſi) æquales ſint anguli *MBD*, *NBP*, ut & anguli *MCD*, *NCP*; aufer communes *NBD* & *NCD*, & reſtabunt æquales *NBM* & *PBT*, *NCM* & *PCR*: adeoque triangula *NBM*, *PBT* ſimilia ſunt, ut & triangula *NCM*, *PCR*. Quare *PT* eſt ad *NM* ut *PB* ad *NB*, & *PR* ad *NM* ut *PC* ad *NC*. Sunt autem puncta *B*, *C*, *N*, *P* immobilia. Ergo *PT* & *PR* datam habent rationem ad *NM*, proindeque datam rationem inter ſe; atque adeo, per Lemma xx, punctum *D* (perpetuus rectarum mobilium *BT* & *CR* concurſus) contingit ſectionem Conicam, per puncta *B*, *C*, *P* tranſeuntem. *Q. E. D.*



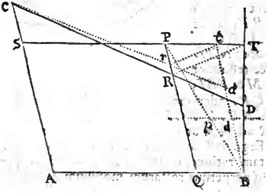
Et contra, ſi punctum mobile *D* contingat ſectionem Conicam tranſeuntem per data puncta *B*, *C*, *A*, & ſit angulus *DBM* ſemper æqualis angulo dato *ABC*, & angulus *DCM* ſemper æqualis angulo dato *ACB*, & ubi punctum *D* incidit ſucceſſive in duo quævis ſectionis puncta immobilia *p*, *P*, punctum mobile *M* incidat ſucceſſive in puncta duo immobilia *n*, *N*: per eadem *n*, *N* agatur Recta *nN*, & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum *M* in linea aliqua Curva. Tanget ergo punctum *D* ſectionem Conicam per puncta quinque *B*, *C*, *A*, *p*, *P*, tranſeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam Curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum *D* ſectionem Conicam per eadem quinque puncta *B*, *C*, *A*, *p*, *P* tranſeuntem, ubi pun-

 ctum *M* perpetuo tangit lineam Rectam. Ergo duæ ſectiones Conicæ tranſibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lem. xx. Igitur punctum *M* verſari in linea Curva abſurdum eſt. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta deſcribere.

Dentur puncta quinque *A, B, C, P, D*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B, C*, quæ poli nominentur, ago rectas *AB, AC*,

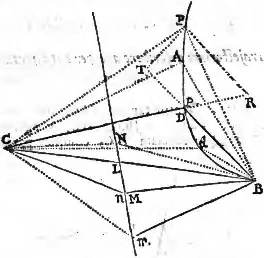


hiſque parallelas *TPS, PRQ* per punctum quartum *P*. Deinde a polis duobus *B, C* age per punctum quintum *D* infinitas duas *BDT, CRD*, noviſſime ductis *TPS, PRQ* (priorem priori & poſteriorem poſteriori) occurrentes in *T* & *R*. Denique de rectis *PT, PR*, acta recta *tr* ipſi *TR* parallela, abſcinde quaſvis *Pt, Pr* ipſis *PT, PR* proportionales; & ſi per earum terminos *t, r* & polos *B, C* actæ *Bt, Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in Trajectoria quæſita. Nam punctum illud *d* (per Lemma xx) verſatur in Conica Sectione per puncta quatuor *A, B, C, P* tranſeunte; &, lineis *Rr, Tt* evaneſcentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Tranſit ergo ſectio Conica per puncta quinque *A, B, C, P, D*. *Q.E.D.*

Idem

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*; &, circum duo eorum *B*, *C* ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primo ad punctum *D*, deinde ad punctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in quibus altera crura *BL*, *CL* caſu utroque ſe decuſſant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos ſuos *B*, *C*, ea lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* interſectio quæ jam ſit *m* incidat ſemper in rectam illam infinitam *MN* & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD* interſectio, quæ jam ſit *d*, Trajectoriam quæſitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d*, per Lem. XXI, continget ſectionem Conicam per puncta *B*, *C* tranſeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per conſtructionem) accedet ad puncta *A*, *D*, *P*. Deſcribetur itaque ſectio Conica tranſiens per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q.E.F.*



Corol. 1. Hinc recta expedite duci poteſt quæ Trajectoriam quæſitam, in puncto quovis dato *B*, continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *Bd* evadet tangens quæſita.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum Centra, Diametri & Latera recta inveniri poſſunt, ut in Corollario ſecundo Lemmatis XIX.

Scholium.

Conſtructio prior evadet paulo ſimplicior jungendo *BP*, & in ea, ſi opus eſt, producta capiendo *Bp* ad *BP* ut eſt *PR* ad *PT*; & per *p* agendo rectam infinitam *p*d ipſi *SPT* parallelam, inque ea capiendo ſemper *p*d æqualem *Pr*; & agendo rectas *B*d, *Cr* concurrentes in *d*. Nam cum ſint *Pr* ad *Pt*, *PR* ad *PT*, *pB* ad *PB*, *p*d ad *Pt* in eadem ratione; erunt *p*d & *Pr* ſemper æqua-

 les.

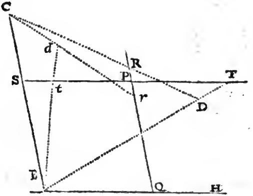
Digitized by Google

les. Hac methodo puncta Trajectoriæ inveniuntur expeditiſſime, niſi mavis Curvam, ut in conſtructione ſecunda, deſcribere Mechanice.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam deſcribere quæ per data quatuor puncta tranſibit, & rectam continget poſitione datam.

Caſ. 1. Dentur tangens HB, punctum contactus B, & alia tria puncta C, D, P. Junge BC, & agendo PS parallelam BH, & PQ parallelam BC, comple parallelogrammum $BSPQ$.

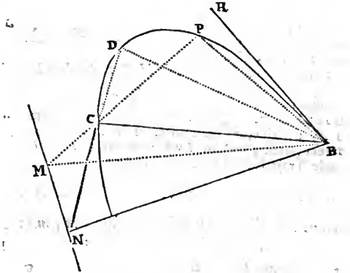


Age BD ſecantem SP in T, & CD ſecantem PQ in R. Denique, agendo quamvis tr ipſi TR parallelam, de PQ, PS abſcinde Pr, Pt ipſis PR, PT proportionales reſpective; & actarum Cr, Bt concurſus d (per Lem. xx) incidet ſemper in Trajectoriam deſcribendam.

Idem

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus *CBH* circa polum *B*, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus *DC* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N* in quibus anguli crus *BC* ſecat radium illum ubi crus alterum *BH* concurrit cum eodem radio in punctis *P* & *D*. Deinde ad actam infinitam *MN* con-

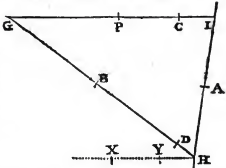


currant perpetuo radius ille *CP* vel *CD* & anguli crus *BC*, & cruris alterius *BH* concurſus cum radio delineabit Trajectoriam quæſitam.

Nam ſi in conſtructionibus Problematis ſuperioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo ſuo ſitu fiet tangens *BH*, atque adeo conſtructiones ibi poſitæ evadent eædem cum conſtructionibus hic deſcriptis. Delineabit igitur cruris *BH* concurſus cum radio ſectionem Conicam per puncta *C*, *D*, *P* tranſeuntem, & rectam *BH* tangentem in puncto *B*. *Q. E. F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, *P* extra tangentem *HI* ſita. Junge bina lineis *BD*, *CP* concurrentibus in *G*, tangentique

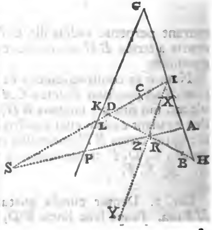
tique occurrentibus in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut ſit *HA* ad *AI*, ut eſt rectangulum ſub media proportionali inter *CG* & *GP* & media proportionali inter *BH* & *HD*, ad rectangulum ſub media proportionali inter *DG* & *GB* & media proportionali inter *PI* & *IC*; & erit *A* punctum contactus. Nam ſi rectæ *PI* parallela *HX* Trajectoriam ſecet in punctis quibuſvis *X* & *Y*: erit (ex Conicis) punctum *A* ita locandum, ut fuerit *HA quad.* ad *AI quad.* in ratione compoſita ex ratione rectanguli *XHY* ad rectangulum *BHD* ſeu rectanguli *CGP* ad rectangulum *DGB* & ex ratione rectanguli *BHD* ad rectangulum *PIC*. Invento autem contactus puncto *A*, deſcribetur Trajectoria ut in caſu primo. *Q. E. F.* Capi autem poteſt punctum *A* vel inter puncta *H* & *I*, vel extra; & perinde Trajectoria dupliciter deſcribi.



PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam deſcribere quæ tranſibit per data tria puncta & rectas duas poſitione datas continget.

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Per punctorum duo quævis *B*, *D* age rectam infinitam *BD* tangentibus occurrentem in punctis *H*, *K*. Deinde etiam per alia duo quævis *C*, *D* age infinitam *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita ſeca in *R* & *S*, ut ſit *HR* ad *KR* ut eſt media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut eſt media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL*



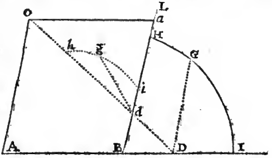
&

& LD. Seca autem pro lubitu vel inter puncta K & H, I & L, vel extra eadem: dein age RS ſecantem tangentes in A & P, & erunt A & P puncta contactuum. Nam ſi A & P ſupponantur eſſe puncta contactuum alicubi in tangentibus ſita; & per punctorum H, I, K, L quodvis I, in tangente alterutra HI ſitum, agatur recta IY tangenti alteri KL parallela, quæ occurrat curvæ in X & Y, & in ea ſumatur IZ media proportionalis inter IX & IY: erit, ex Conicis, rectangulum XIY ſeu IZ *quad.* ad LP *quad.* ut rectangulum CID ad rectangulum CLD, id eſt (per conſtructionem) ut SI *quad.* ad SL *quad:* atque adeo IZ ad LP ut SI ad SL. Jacent ergo puncta S, P, Z in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in G, erit (ex Conicis) rectangulum XIY ſeu IZ *quad.* ad IA *quad.* ut GP *quad* ad GA *quad:* adeoque IZ & IA ut GP ad GA. Jacent ergo puncta P, Z & A in una recta, adeoque puncta S, P & A ſunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta R, P & A ſunt in una recta. Jacent igitur puncta contactuum A & P in recta RS. Hiſce autem inventis, Trajectoria deſcribetur ut in caſu primo Problematis ſuperioris. *Q. E. F.*

LEMMA XXII.

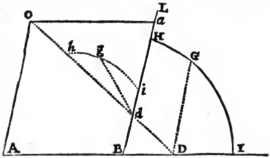
Figuras in alias ejuſdem generis figuras mutare.

Tranſmutanda ſit figura quævis HGI. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ AO, BL tertiam quamvis poſitione datam AB ſecantes in A & B, & a figuræ puncto quovis G, ad rectam AB ducatur quævis GD, ipſi OA parallela. Deinde a puncto aliquo O, in linea OA dato, ad punctum D ducatur recta OD, ipſi BL occurrens in d, & a puncto occurſus erigatur recta dg datum quemvis angulum cum recta BL continens, atque eam habens rationem ad Od quam habet DG ad OD; & erit g punctum in figura nova hgi puncto G reſpondens. Eadem ratione puncta ſingula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ.



Concipe

Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum g motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem deſcribet. Diſtinctionis gratia nominemus DG ordinatam primam, dg ordinatam novam; AD abſciſſam primam, ad abſciſſam novam; O polum, OD radium abſcidentem, OA radium ordinatum primum, & Oa (qno parallelogrammum $OABa$ completur) radium ordinatum novum.



Dico jam quod, ſi punctum G tangit rectam Lineam poſitione datam, punctum g tanget etiam Lineam rectam poſitione datam. Si punctum G tangit Conicam ſectionem, punctum g tanget etiam Conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic Circulum annumero. Porro ſi punctum G tangit Lineam tertii ordinis Analytici, punctum g tanget Lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis Analytici quas puncta G, g tangunt. Etenim ut eſt ad ad OA ita ſunt Od ad OD, dg ad DG, & AB ad AD; adeoque AD æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum G tangit rectam Lineam, atque adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abſciſſam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, producetur æquatio nova, in qua abſciſſa nova ad & ordinata nova dg ad unicam tantum dimenſionem aſcendent, atque adeo quæ deſignat Lineam rectam. Sin AD & DG (vel earum alterutra) aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione prima, aſcendent itidem ad & dg ad duas in æquatione ſecunda. Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione ſecunda & AD, DG in prima aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea Lineæ, quas puncta G, g tangunt, ſunt ejuſdem ordinis Analytici.

Dico

Digitized by Google

Dico præterea quod ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima; hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam tranſlata tanget lineam illam curvam in figura nova: & contra. Nam ſi Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem tranſlata accedent ad invicem & coibunt in figura nova, atque adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, ſimul evadent curvarum tangentes in figura utraque. Componi poſſent harum aſſertionum Demonſtrationes more magis Geometrico. Sed brevitati conſulo.

Igitur ſi figura rectilinea in aliam tranſmutanda eſt, ſufficit rectarum a quibus conflatur interſectiones transferre, & per eaſdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam tranſmutare oportet, transferenda ſunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope curva linea definitur. Inſervit autem hoc Lemma ſolutioni difficiliorum Problematum, tranſmutando figuras propoſitas in ſimpliciores. Nam rectæ quævis convergentes tranſmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo, lineam quamvis rectam quæ per concurſum convergentium tranſit: id adeo quia concurſus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ ſunt quæ ad punctum infinite diſtans tendunt. Poſtquam autem Problema ſolvitur in figura nova, ſi per inverſas operationes tranſmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur ſolutio quæſita.

Utile eſt etiam hoc Lemma in ſolutione Solidorum Problematum. Nam quoties duæ ſectiones Conicæ obvenerint, quarum interſectione Problema ſolvi poteſt, tranſmutare licet earum alterutram, ſi Hyperbola ſit vel Parabola, in Ellipſin: deinde Ellipſis facile mutatur in Circulum. Recta item & ſectio Conica, in conſtructione Planorum Problematum, vertuntur in Rectam & Circulum.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

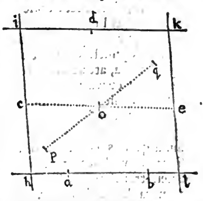
Trajectoriam deſcribere quæ per data duo puncta tranſibit & rectas tres continget poſitione datas.

Per concurſum tangentium quarumvis duarum cum ſe invicem, & concurſum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data tranſit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, tranſmutetur figura, per Lemma ſuperius, in figuram novam. In

 hac

Digitized by Google

hac figura tangentes illæ duæ evadent ſibi invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data tranſeunti. Sunto *hi*, *kl* tangentes illæ duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *bl* recta huic parallela tranſiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ Conica ſectio in hac figura nova tranſire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. Secentur rectæ *hi*, *ik*, *kl* in *c*, *d*, *e*, ita ut ſit *hc* ad latus quadratum rectanguli *ahb*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd* ut eſt ſumma rectarum *hi* & *kl* ad ſummam trium linearum quarum prima eſt recta *ik*, & alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *ahb* & *alb*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex Conicis, ſunt *hc* quadratum ad rectangulum *ahb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad rectangulum *alb* in eadem ratione; & propterea *hc* ad latus quadratum ipſius *ahb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd*, & *el* ad latus quadratum ipſius *alb* ſunt in ſubduplicata illa ratione, & compoſite, in data ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *ahb* & recta *ik* & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inverſas operationes Lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per Probl. XIV, deſcribetur Trajectoria. *Q. E. F.* Ceterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, Problema impoſſibile eſt.



PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

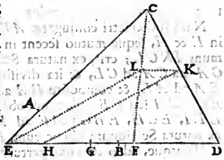
Trajectoriam deſcribere quæ tranſibit per punctum datum & rectas quatuor poſitione datas continget.

Ab interſectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interſectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita,

ta, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, tranſmutetur figura (per Lem. XXII) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl* continentes parallelogrammum *hikl*. Sitque *p* punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato reſpondens. Per figuræ centrum *O* agatur *pq*, & exiſtente *Oq* æquali *Op*, erit *q* punctum alterum per quod ſectio Conica in hac figura nova tranſire debet. Per Lemmatis XXII operationem inverſam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria deſcribenda eſt. Per eadem vero deſcribi poteſt Trajectoria illa per Prob. XVII. *Q.E.F.*

LEMMA XXIII.

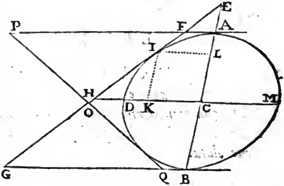
Si rectæ duæ poſitione datæ AC, BD *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* CD, *qua puncta indeterminata* C, D *junguntur, ſecetur in ratione data in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in recta poſitione data.*



Concurrant enim rectæ *AC*, *BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut eſt *BD* ad *AC*, ſitque *FD* ſemper æqualis datæ *EG*; & erit ex conſtructione *EC* ad *GD*, hoc eſt, ad *EF* ut *AC* ad *BD*, adeoque in ratione data, & propterea dabitur ſpecie triangulum *EFC*. Secetur *CF* in *L* ut ſit *CL* ad *CF* in ratione *CK* ad *CD*; &, ob datam illam rationem, dabitur etiam ſpecie triangulum *EFL*; proindeque punctum *L* locabitur in recta *EL* poſitione data. Junge *LK*, & ſimilia erunt triangula *CLK*, *CFD*; &, ob datam *FD* & datam rationem *LK* ad *FD*, dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*, & erit ſemper *ELKH* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi illius latere poſitione dato *HK*. *Q.E.D.*

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque Coniſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico quod Sectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.



Sunto *AF*, *GB* parallelæ duæ Coniſectionem *ADB* tangentes in *A* & *B*; *EF* recta tertia Coniſectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; ſitque *CD* ſemidiameter Figuræ tangentibus parallela: Dico quod *AF*, *CD*, *BG* ſunt continue proportionales.

Nam ſi diametri conjugatæ *AB*, *DM* tangenti *FG* occurrant in *E* & *H*, ſeque mutuo ſecent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; erit, ex natura Sectionum Conicarum, ut *EC* ad *CA* ita *CA* ad *CL*, & ita diviſim *EC−CA* ad *CA−CL*, ſeu *EA* ad *AL*, & compoſite *EA* ad *EA+AL* ſeu *EL* ut *EC* ad *EC+CA* ſeu *EB*; adeoque (ob ſimilitudinem triangulorum *EAF*, *ELI*, *ECH*, *EBG*) *AF* ad *LI* ut *CH* ad *BG*. Eſt itidem, ex natura Sectionum Conicarum, *LI* (ſeu *CK*) ad *CD* ut *CD* ad *CH*; atque, adeo ex æquo perturbate, *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, *BG* occurrant in *F* & *G*, *P* & *Q*, ſeque mutuo ſecent in *O*; erit (ex æquo perturbate) *AF* ad *BQ* ut *AP* ad *BG*, & diviſim ut *FP* ad *GQ*, atque adeo ut *FO* ad *OG*.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ *PG*, *FQ* per puncta *P* & *G*, *F* & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum Figuræ & puncta contactuum *A*, *B* tranſeuntem.

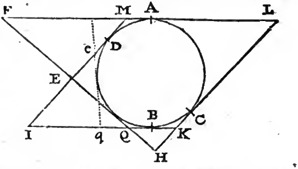
LEM-

Digitized by Google

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant Sectionem quamcunque Conicam, & abſcindantur ad tangentem quamvis quintam; ſumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abſciſſæ terminatæ ad angulos oppoſitos parallelogrammi: dico quod abſciſſa alterutra ſit ad latus illud a quo eſt abſciſſa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium, eſt ad abſciſſarum alteram.

Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML, IK, KL, MI* ſectionem Conicam in *A, B, C, D*, & ſecet tangens quinta *FQ* hæc latera in *F, Q, H* & *E*; ſumantur autem laterum *MI, KI* abſciſſæ *ME, KQ*, vel laterum *KL, ML* abſciſſæ *KH, MF*: dico quod ſit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*; & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per Corollarium ſecundum Lemmatis ſuperioris, eſt *ME* ad *EI* ut (*AM* ſeu) *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q. E. D.* Item *KH* ad *HL* ut (*BK* ſeu) *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc ſi datur parallelogramum *IKLM*, circa datam Sectionem Conicam deſcriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$.

Corol. 2. Et ſi ſexta ducatur tangens *eq* tangentibus *KI, MI* occurrens in *q* & *e*; rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque *KQ* ad *Me* ut *Kq* ad *ME*, & diviſim ut *Qq* ad *Ee*.

Corol. 3. Unde etiam ſi *Eq, eQ* jungantur & biſecentur, & recta per puncta biſectionum agatur, tranſibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum ſit *Qq* ad *Ee* ut *KQ* ad *Me*, tranſibit ca-

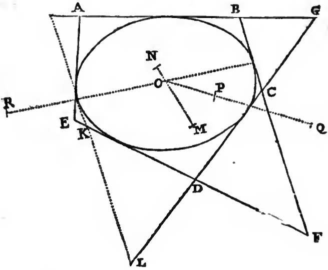
dem

 dem recta per medium omnium Eq, $e\mathcal{Q}$, MK; (per Lem. xxiii) & medium rectæ MK eſt centrum Sectionis.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam deſcribere quæ rectas quinque poſitione datas continget.

Dentur poſitione tangentes ABG, BCF, $GC\mathcal{D}$, $F\mathcal{D}E$, EA. Figuræ quadrilateræ ſub quatuor quibuſvis contentæ $ABFE$ diagonales AF, BE biſeca, & (per Corol. 3. Lem. xxv) recta MN per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum Trajectoriæ. Rurſus Figuræ quadrilateræ $BG\mathcal{D}F$, ſub aliis quibuſvis quatuor



tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) $B\mathcal{D}$, GF biſeca in $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$: & recta $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum Trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concurſu biſecantium. Sit illud O. Tangenti cuivis BC parallelam age KL, ad eam diſtantiam ut centrum O in medio inter parallelas locetur, & acta KL tanget Trajectoriam deſcribendam. Secet hæc tangentes

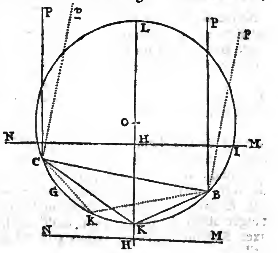
Digitized by Google

gentes alias quaſvis duas *GCD*, *FDE* in *L* & *K*. Per harum tangentium non parallelarum *CL*, *FK* cum parallelis *CF*, *KL* concurſus *C* & *K*, *F* & *L* age *CK*, *FL* concurrentes in *R*, & recta *OR* ducta & producta ſecabit tangentes parallelas *CF*, *KL* in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per 1. Probl. XIV. Trajectoriam deſcribere. *Q. E. F.*

Scholium.

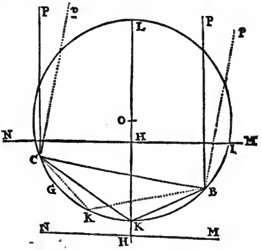
Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel Aſymptoti, includuntnr in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter diſtantes. Aſymptotos autem pro tangente habenda eſt, & ejus terminus infinite diſtans (ſi ita loqui fas ſit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujuſvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atque conſtructiones Problematis XIV & Caſus primi Problematis XV vertentur in conſtructiones Problematum ubi Aſymptoti dantur.

Poſtquam Trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In conſtructione & figura Lemmatis XXI, fac ut angulorum mobilium *PBN*, *PCN* crura *BP*, *CP*, quorum concurſu Trajectoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos *B*, *C* in figura illa. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura *CN*, *BN*, concurſu ſuo *K* vel *k*, Circulum *IBKGC*. Sit Circuli hujus centrum *O*. Ab hoc centro ad Regulam *MN*, ad quam altera illa crura *CN*, *BN* interea concurrebant dum



dum Trajectoria deſcribebatur, demitte normalem *OH* Circulo occurrentem in *K* & *L*. Et ubi crura illa altera *CK*, *BK* concurrunt ad punctum illud *K* quod Regulæ propius eſt, crura prima *CP*, *BP* parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius *L*. Unde ſi detur Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium vero quadrata ſunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile eſt Trajectoriam ſpecie datam per data quatuor puncta deſcribere. Nam ſi duo ex punctis datis conſtituantur poli *C*, *B*, tertium dabit angulos mobiles *PCK*, *PBK*; his autem datis deſcribi poteſt Circulus *IBKGC*. Tum ob datam ſpecie Trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, adeoque ipſa *OH*. Centro *O* & intervallo *OH* deſcribe alium circulum,



& recta quæ tangit hunc circulum, & tranſit per concurſum crurum *CK*, *BK*, ubi crura prima *CP*, *BP* concurrunt ad quartum datum punctum erit Regula illa *MN* cujus ope Trajectoria deſcribetur. Unde etiam viciſſim Trapezium ſpecie datum (ſi caſus quidam impoſſibiles excipiantur) in data quavis Sectione Conica inſcribi poteſt.

Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ ſpecie datæ, datis punctis & tangentibus, deſcribi poſſunt. Ejus generis eſt quod, ſi recta linea per punctum quodvis poſitione datum ducatur, quæ datam Coniſectionem in punctis duobus interſecet, & interſectionum intervallum biſecetur, punctum biſectionis tanget aliam Coniſectionem ejuſdem ſpeciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

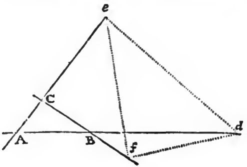
LEMMA

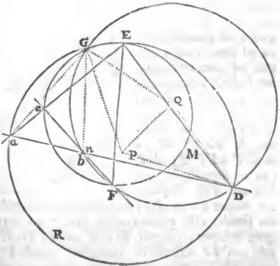
Digitized by Google

LEMMA XXVI.

Trianguli ſpecie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem poſitione datas, quæ non ſunt omnes parallelæ, ſingulos ad ſingulas ponere.

Dantur poſitione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF* deſcribe tria circulorum ſegmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales reſpectivè. Deſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, *EF* ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant; deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores ſe mutuo in *G*, ſintque centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut eſt *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* ſecans circulum ſecundum *DFG* in *b*, tum *aE* ſecans circulum

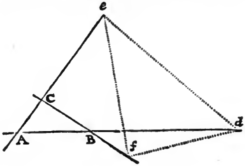


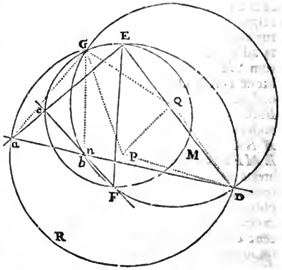


Digitized by Google

culum tertium *EMF* in *c*. Et compleatur Figura *ABCdef* ſimilis & æqualis Figuræ *abcDEF*. Dico factum.

Agatur enim *Fc* ipſi *aD* occurrens in *n*, & jungantur *aG*, *bG*, *QG*, *QD*, *PD*. Ex conſtructione eſt angulus *EaD* æqualis angulo *CAB*, & angulus *acF* æqualis angulo *ACB*, adeoque triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* ſeu *FnD* angulo *ABC*, adeoque angulo *FbD* æqualis eſt; & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *GPQ*, qui dimidius eſt anguli ad centrum *GPD*, æqualis eſt angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus *GQP*, qui dimidius eſt anguli ad centrum *GQD*, æqualis eſt complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam *GbD*, adeoque æqualis angulo *Gba*; ſuntque ideo triangula *GPQ*, *Gab* ſimilia; & *Ga* eſt ad *ab* ut *GP* ad *PQ*; id eſt (ex conſtructione) ut *Ga* ad *AB*. Æquantur itaque *ab* & *AB*; & propterea triangula *abc*, *ABC*, quæ modo ſimilia eſſe probavimus, ſunt etiam æqualia. Unde, cum tangant inſuper trianguli *DEF* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc* reſpective, compleri poteſt Figura *ABCdef* Figuræ *abcDEF* ſimilis & æqualis, atque eam complendo ſolvetur Problema. *Q. E. F.*





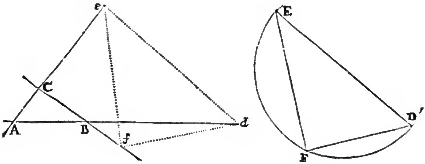
Corol.

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes longitudine datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe Triangulum *DEF*, puncto *D* ad latus *EF* accedente, & lateribus *DE*, *DF* in directum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *DE* rectis poſitione datis *AB*, *AC*, & pars data *DF* rectis poſitione datis *AB*, *BC* interponi debet; & applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur Problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt.

Deſcribenda ſit Trajectoria quæ ſit ſimilis & æqualis Lineæ curvæ *DEF*, quæque a rectis tribus *AB*, *AC*, *BC* poſitione datis, in



partes datis hujus partibus *DE* & *EF* ſimiles & æquales ſecabitur.

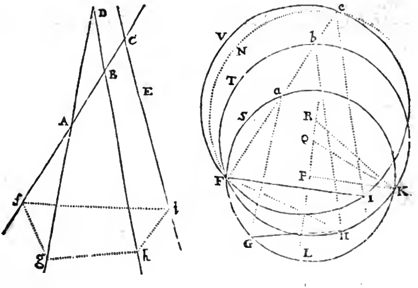
Age rectas *DE*, *EF*, *DF*, & trianguli hujus *DEF* pone angulos *D*, *E*, *F* ad rectas illas poſitione datas (per Lem. XXVI) Dein circa triangulum deſcribe Trajectoriam Curvæ *DEF* ſimilem & æqualem. *Q. E. F.*

Digitized by Google

LEMMA XXVII.

Trapezium ſpecie datum deſcribere cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*, quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit Trapezium *fghi* quod ſit Trapezio *FGHI*



ſimile, & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC*, cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales, tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* reſpective. Jungatur *FH* & ſuper *FG*, *FH*, *FI* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta *FSG*, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angulum

Digitized by Google

lum æqualem angulo *BAD*, ſecundum *FTH* capiat angulum æqualem angulo *CBD*, ac tertium *FVI* capiat angulum æqualem angulo *ACE*. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum *FG*, *FH*, *FI*, ut literarum *FSGF* idem ſit ordo circularis qui literarum *BADB*, utque literæ *FTHF* eodem ordine cum literis *CBDC*, & literæ *FVIF* eodem cum literis *ACEA* in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros, ſitque *P* centrum circuli primi *FSG*, & *Q* centrum ſecundi *FTH*. Jungatur & utrinque producatur *PQ*, & in ea capiatur *QR* in ea ratione ad *PQ* quam habet *BC* ad *AB*. Capiatur autem *QR* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q*, *R* idem ſit ordo atque literarum *A*, *B*, *C*: centroque *R* & intervallo *RF* deſcribatur circulus quartus *FNc* ſecans circulum tertium *FVI* in *c*. Jungatur *Fc* ſecans circulum primum in *a* & ſecundum in *b*. Agantur *aG*, *bH*, *cI*, & Figuræ *abcFGHI* ſimilis conſtituatur Figura *ABCfghi*: Eritque Trapezium *fghi* illud ipſum quod conſtituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi *FSG*, *FTH* ſe mutuo in *K*. Jungantur *PK*, *QK*, *RK*, *aK*, *bK*, *cK*, & producatur *QP* ad *L*. Anguli ad circumferentias *FaK*, *FbK*, *FcK* ſunt ſemiſſes angulorum *FPK*, *FQK*, *FRK* ad centra, adeoque angulorum illorum dimidiis *LPK*, *LQK*, *LRK* æquales. Eſt ergo Figura *PQRK* Figuræ *abcK* æquiangula & ſimilis, & propterea *ab* eſt ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id eſt, ut *AB* ad *BC*. Angulis inſuper *FaG*, *FbH*, *FcI* æquantur *fAg*, *fBh*, *fCi* per conſtructionem. Ergo Figuræ *abcFGHI* Figura ſimilis *ABCfghi* compleri poteſt Quo facto Trapezium *fghi* conſtituetur ſimile Trapezio *FGHI* & angulis ſuis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *ABC*, *AD*, *BD*, *CE* *Q. E. F.*

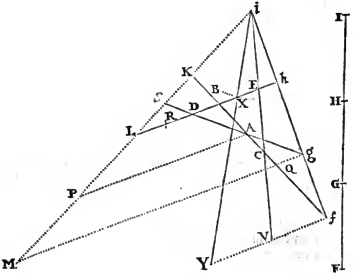
Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli *FGH*, *GHI* uſque eo, ut rectæ *FG*, *GH*, *HI* in directum jaceant, & in hoc caſu conſtruendo Problema, ducetur recta *fghi* cujus partes *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor poſitione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ *FG*, *GH*, *HI*, eundemque ſervabunt ordinem inter ſe. Idem vero ſic fit expeditius.

Produ-

Digitized by Google

Producantur AB ad K, & BD ad L, ut ſit BK ad AB ut HI ad GH; & DL ad BD ut GI ad FG; & jungatur KL occurrens rectæ CE in i. Producatur iL ad M, ut ſit LM ad iL ut GH ad HI, & agatur tum MQ ipſi LB parallela rectæque AD occurrens in g, tum gi ſecans AB, BD in f, h. Dico factum.

Secet enim Mg rectam AB in Q, & AD rectam KL in S, & agatur AP quæ ſit ipſi BD parallela & occurrat iL in P, & erunt gM ad Lh (gi ad hi, Mi ad Li, GI ad HI, AK ad BK) & AP ad BL in eadem ratione. Secetur DL in R ut ſit



DL ad RL in eadem illa ratione, & ob proportionales gS ad gM, AS ad AP, & DS ad DL; erit, ex æquo, ut gS ad Lh ita AS ad BL & DS ad RL; & mixtim, $BL-RL$ ad $Lh-BL$ ut $AS-DS$ ad $gS-AS$. Id eſt BR ad Bh ut AD ad Ag adeoque ut BD ad gQ. Et viciſſim BR ad BD ut Bh ad gQ, ſeu fh ad fg. Sed ex conſtructione linea BL eadem ratione ſecta fuit in D & R atque linea FI in G & H: ideoque eſt BR ad BD ut FH ad FG. Ergo fh eſt ad fg ut FH ad FG. Cum igitur ſit etiam gi ad hi ut Mi ad Li, id eſt, ut GI ad HI, patet lineas FI, fi in g & h, G & H ſimiliter ſectas eſſe. *Q. E. F.*

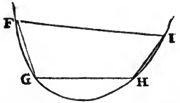
In

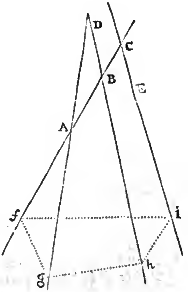
In conſtructione Corollarii hujus poſtquam ducitur LK ſecans CE in i, producere licet iE ad V, ut ſit EV ad Ei ut FH ad HI, & agere Vf parallelam ipſi $B\mathcal{D}$. Eodem recidit ſi centro i, intervallo IH, deſcribatur circulus ſecans $B\mathcal{D}$ in X, & producatur iX ad Y, ut ſit iY æqualis IF, & agatur Yf ipſi $B\mathcal{D}$ parallela.

Problematis hujus ſolutiones alias *Wrennus* & *Walliſius* olim excogitarunt.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ a rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.





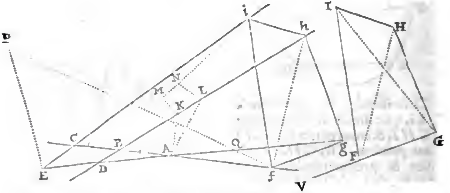
Deſcribenda ſit Trajectoria $fghi$, quæ ſimilis ſit Lineæ curvæ $FGHI$, & cujus partes fg, gh, hi illius partibus FG, GH, HI ſimiles & proportionales, rectis AB & $A\mathcal{D}$, $A\mathcal{D}$ & $B\mathcal{D}$, $B\mathcal{D}$ & CE poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis FG, GH, HI, FI, deſcribatur (per Lem. XXVII.) Trapezium $fghi$ quod ſit Trapezio $FGHI$ ſimile & cujus anguli f, g, h, i tangant rectas illas poſitione datas AB, $A\mathcal{D}$, $B\mathcal{D}$, CE, ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein circa hoc Trapezium deſcribatur Trajectoria curvæ Lineæ $FGHI$ conſimilis.

Scholium.

Digitized by Google

Scholium.

Conſtrui etiam poteſt hoc Problema ut ſequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* conſtituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, ſitque ad *AK* ut eſt *HI* ad *GH*; & *LN* conſtituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, ſitque ad *AL* ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND* eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*,



ſitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum recta *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem ſit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & ſi ſuper linea *fi* eodem quoque literarum ordine conſtituatur Trapezium *fghi* Trapezio *FGHI* ſimile, & circumſcribatur Trajectoria ſpecie data, ſolvetur Problema.

Hactenus de Orbibus inveniendis. Supereſt ut Motus corporum in Orbibus inventis determinemus.

SECTIO

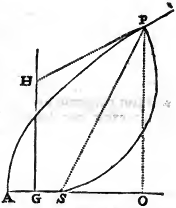
Digitized by Google

SECTIO VI.

De Inventione Motuum in Orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in data Trajectoria Parabolica moti invenire locum ad tempus aſſignatum.



Sit S umbilicus & A vertex principalis Parabolæ, ſitque $4AS \times M$ æquale areæ Parabolicæ abſcindendæ APS, quæ radio SP, vel poſt exceſſum corporis de vertice deſcripta fuit, vel ante appulſum ejus ad verticem deſcribenda eſt. Innoteſcit quantitas areæ illius abſcindendæ ex tempore ipſi proportionali. Biſeca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale 3 M, & Circulus centro H, intervallo HS deſcriptus ſecabit Parabolam in loco quæſito P. Nam, demiſſa ad axem perpendiculari PO & ducta PH, eſt $AGq + GHq (= HPq = \overline{AO - AG}: quad. + \overline{PO - GH}: quad.) = AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. Unde $2GH \times PO \ (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{1}{4}POq$. Pro AOq ſcribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; &, applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductiſque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS (= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ areæ $\overline{APO - SPO})$ $=$ areæ APS. Sed GH erat 3 M, & inde $\frac{4}{3}GH \times AS$ eſt $4AS \times M$. Ergo area abſciſſa APS æqualis eſt abſcindendæ $4AS \times M$. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc GH eſt ad AS, ut tempus quo corpus deſcripſit arcum AP ad tempus quo corpus deſcripſit arcum inter verticem A & perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. Et Circulo ASP per corpus motum P perpetuo tranſeunte, velocitas puncti H eſt ad velocitatem quam corpus habuit

in vertice A, ut 3 ad 8; adeoque in ea etiam ratione eſt linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus ſui ab A ad P, ea cum velocitate quam habuit in vertice A, deſcribere poſſet.

Corol. 3. Hinc etiam vice verſa inveniri poteſt tempus quo corpus deſcripſit arcum quemvis aſſignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in H.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat Figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abſciſſa, poſſit per æquationes numero terminorum ac dimenſionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque ſemper ea cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra Ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet Spiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ Ovalis a recta illa abſciſſæ incrementum per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis eſt, adeoque omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri poſſunt: & propterea rectæ cujuſvis poſitione datæ interſectio cum Spirali inveniri etiam poteſt per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta Spiralem ſecat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua interſectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum interſectiones omnes radicibus totidem, adeoque aſcendit ad tot dimenſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam Circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, qua interſectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum ſectionum Conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, qua omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde

Digitized by Google

Unde etiam interſectiones Sectionum Conicarum & Curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum Curvarum tertiæ poteſtatis, quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. Id niſi neceſſario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & pluſquam Solida ad Solida. Loquor hic de Curvis poteſtate irreducibilibus. Nam ſi æquatio per quam Curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit: Curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum Conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum; ternæ rectarum & Curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & Curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo rectæ & Spiralis interſectiones numero infinitæ, cum Curva hæc ſit ſimplex & in Curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam ſi a polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud una cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones Spiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæque prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutata magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoque una eademque exhibebit interſectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & Spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abſciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo Spiralis deſcribitur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De Ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Digitized by Google

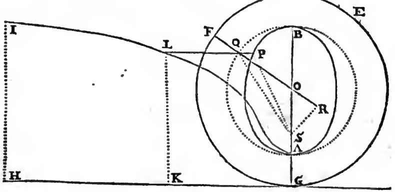
Corollarium.

Hinc area Ellipſeos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto deſcribitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per deſcriptionem Curvarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id eſt, per longitudinum rationes complicatas, determinari poſſunt; cæteraſque (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudines quæ ſunt vel non ſunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) ſunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur Ellipſeos tempori proportionalem abſcindo per Curvam Geometrice irrationalem ut ſequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Ellipſeos *APB* ſit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, ſitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G*, ut ſit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroque



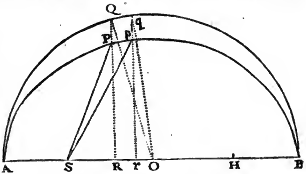
O & intervallo *OG* deſcribe circulum *EFG*, & ſuper regula *GH*, ceu fundo, progrediatur Rota *GEF* revolvendo circa axem ſuum, & interea puncto ſuo *A* deſcribendo Trochoidem *ALI*. Quo

Quo facto, cape GK in ratione ad Rotæ perimetrum $GEFG$, ut eſt tempus quo corpus progrediendo ab A deſcripſit arcum AP, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Erigatur perpendiculum KL occurrens Trochoidi in L, & acta LP ipſi KG parallela occurret Ellipſi in corporis loco quæſito P.

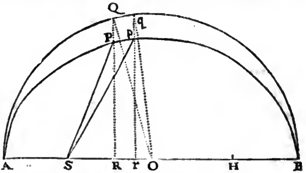
Nam centro O, intervallo OA deſcribatur ſemicirculus AQB, & arcui AQ occurrat LP producta in Q, junganturque SQ, OQ. Arcui EFG occurrat OQ in F, & in eandem OQ demittatur perpendiculum SR. Area APS eſt ut area AQS, id eſt, ut differentia inter ſectorem OQA & triangulum OQS, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2} OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2} OQ \times SR$, hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2} OQ$, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR, adeoque (ob æqualitatem datarum rationum SR ad ſinum arcus AQ, OS ad OA, OA ad OG, AQ ad GF, & diviſim $AQ - SR$ ad $GF -$ ſin. arc. AQ) ut GK differentia inter arcum GF & ſinum arcus AQ. *Q. E. D.*

Scholium.

Cæterum, cum difficilis ſit hujus Curvæ deſcriptio, præſtat ſolutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57,29578. quem arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia SH ad Ellipſeos diametrum AB; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eadem ratione inverſe. Quibus ſemel inventis, Problema deinceps confit per ſequentem Analyſin. Per conſtructionem quamvis (vel utcunque conjecturam faciendo) cognoſcatur corporis locus P proximus vero ejus loco p. Demiſſaque ad axem Ellipſeos ordinatim applicata PR, ex proportione diametrorum Ellipſeos, dabitur Circuli circumſcripti AQB ordinatim applicata RQ, quæ ſinus eſt anguli AOQ exiſtente AO radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis,

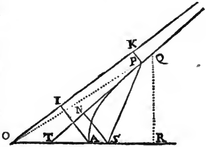


tionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt tempus quo corpus deſcripſit arcum *Ap*, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Sit angulus iſte N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus iſte anguli *AOQ* ad radium, & angulus E ad angulum N−*AOQ*+D, ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem L coſinu anguli *AOQ* diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Poſtea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut eſt ſinus anguli *AOQ*+E ad radium, tum angulus G ad angulum N−*AOQ*−E+F ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem coſinu anguli *AOQ*+E diminutam ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut eſt ſinus anguli *AOQ*+E+G ad radium; & angulus I ad angulum N−*AOQ*−E−G+H, ut eſt longitudo L ad eandem longitudinem coſinu anguli *AOQ*+E+G diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Et ſic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus *AOq* æqualis angulo *AOQ*+E+G+I+&c. et ex coſinu ejus *Or* & ordinata *pr*, quæ eſt ad ſinum ejus *qr* ut Ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus *p*. Si quando angulus N−*AOQ*+D negativus eſt, debet ſignum + ipſius E ubique mutari in −, & ſignum − in +. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I, ubi anguli N−*AOQ*−E+F, & N−*AOQ*−E−G+H negativi prodeunt. Convergit autem ſeries infinita *AOQ*+E+G+I+&c. quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area *APS* ſit ut differentia inter arcum *AQ* & rectam ab umbilico *S* in Radium *OQ* perpendiculariter demiſſam.

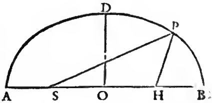


Non diſſimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus Centrum *O*, Vertex *A*, Umbilicus *S* & Aſymptotos *OK*. Cognoſcatur

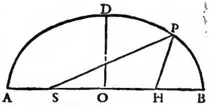
noſcatur quantitas areæ abſcindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ *SP*, quæ aream *APS* abſcindat veræ proximam. Jungatur *OP*, & ab *A* & *P* ad Aſymptoton agantur *AI*, *PK* Aſymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area *AIKP*, eique æqualis area *OPA*, quæ ſubducta de triangulo *OPS* relinquet aream abſciſſam *APS*. Applicando areæ abſcindendæ A & abſciſſæ *APS* differentiam duplam $2\,APS - 2\,A$ vel $2\,A - 2\,APS$ ad lineam *SN*, quæ ab umbilico *S* in tangentem *PT* perpendicularis eſt, orietur longitudo chordæ *PQ*. Inſcribatur autem chorda illa *PQ* inter *A* & *P*, ſi area abſciſſa *APS* major ſit area abſcindenda A, ſecus ad puncti *P* contrarias partes: & punctum *Q* erit locus corporis accuratior. Et computatione repetita invenietur idem accuratior in perpetuum.



Atque his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum uſibus Aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui ſequitur. Exiſtentibus *AO*, *OB*, *OD* ſemiaxibus Ellipſeos, & L ipſius latere recto, ac D differentia inter ſemiaxem minorem *OD* & lateris recti ſemiſſem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus ſinus ſit ad Radium ut eſt rectangulum ſub differentia illa D, & ſemiſumma axium $AO + OD$ ad quadratum axis majoris *AB*; tum angulum Z, cujus ſinus ſit ad Radium ut eſt duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantia *SH* & differentia illa D ad triplum quadratum ſemiaxis majoris *AO*. His angulis ſemel inventis; locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus *BP* deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V (primam medii motus æquationem) ad angulum Y (æquationem maximam primam) ut eſt ſinus dupli anguli T ad Radium; atque



atque angulum X (æquationem ſecundam) ad angulum Z (æquationem maximam ſecundam) ut eſt cubus ſinus anguli T ad cubum Radii. Angulorum T, V, X vel ſummæ T + X + V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ T + X − V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum *BHP* (motum medium æquatum;) &, ſi *HP* occurrat Ellipſi in *P*, acta *SP* abſcindet aream *BSP* tempori proportionalem quamproxime. Hæc Praxis ſatis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X (in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum) figuras duas terſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad Theoriam Planetarum. Nam in Orbe vel Martis ipſius, cujus Æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *BSP* & diſtantia *SP* in promptu ſunt per *Wardi* methodum notiſſimam.



Hactenus de Motu corporum in lineis Curvis. Fieri autem poteſt ut mobile recta deſcendat vel recta aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi Motus ſpectant, pergo jam exponere.

SECTIO

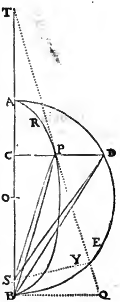
Digitized by Google

SECTIO VII.

De Corporum Aſcenſu & Deſcenſu Rectilineo.

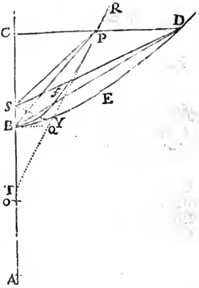
PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

Poſito quod Vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, Spatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus deſcribit.



Caſ. 1. Si Corpus non cadit perpendiculariter deſcribet id, per Corol. 1. Prop. XIII, Sectionem aliquam Conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit Sectio illa Conica $ARPB$ & umbilicus ejus S. Et primo ſi Figura Ellipſis eſt, ſuper hujus axe majore AB deſcribatur Semicirculus ADB, & per corpus decidens tranſeat recta DPC perpendicularis ad axem; actiſque DS, PS erit area ASD areæ ASP atque adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe AB minuatur perpetuo latitudo Ellipſeos, & ſemper manebit area ASD tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum: &, Orbe APB jam coincidente cum axe AB & umbilico S cum axis termino B, deſcendet corpus in recta AC, & area ABD evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque Spatium AC, quod corpus de loco A perpendiculariter cadendo tempore dato deſcribit, ſi modo tempori proportionalis capiatur area ABD, & a puncto D ad rectam AB demittatur perpendicularis DC. *Q. E. I.*

Caſ. 2. Si Figura illa *RPB* Hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem *AB* Hyperbola rectangula *BED*: & quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* ſunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, ſingulæ ad ſingulas, in data ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis eſt tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere tranſverſo, & coibit arcus *PB* cum recta *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto deſcenſu deſcribit lineam *CB*. *Q. E. I.*



Caſ. 3. Et ſimili argumento ſi Figura *RPB* Parabola eſt, & eodem vertice principali *B* deſcribatur alia Parabola *BED*, quæ ſemper maneat data interea dum Parabola prior in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea *CB*; fiet ſegmentum Parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* deſcendet ad centrum *S* vel *B*. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

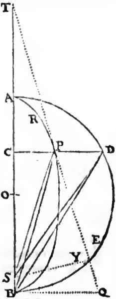
Poſitis jam inventis, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis C *eſt ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *Circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione quam* AC, *diſtantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad Figuræ ſemidiametrum principalem* ½ AB.

Biſecetur *AB*, communis utriuſque Figuræ *RPB*, *DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT* quæ tangat Figuram *RPB* in *P*, atque

etiam

Digitized by Google

etiam ſecet communem illam diametrum AB (ſi opus eſt productam) in T; ſitque ST ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque Figuræ RPB latus rectum ponatur L. Conſtat per Cor. 9. Prop. XVI, quod corporis in linea RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P ſit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem centrum Circulum deſcribentis in ſubduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{4}$ L $\times SP$ ad ST quadratum. Eſt autem ex Conicis ACB ad CPq ut $2AO$ ad L, adeoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in ſubduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad ST *quad.* Porro ex Conicis eſt CO ad BO ut BO ad TO, & compoſite vel diviſim ut CB ad BT. Unde vel dividendo vel componendo fit BO – vel + CO ad BO ut CT ad BT, id eſt AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum Figuræ RPB latitudo CP, ſic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SP cum linea BC, lineaque ST cum linea BQ; & corporis jam recta deſcendentis in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC Circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad STq, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad STq) in ſubduplicata ratione AC ad AO ſive $\frac{1}{2}$ AB. *Q. E. D.*



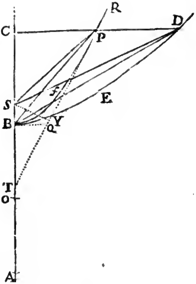
Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

Corol. 2. Corpus ad datam a centro diſtantiam in Circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam a centro diſtantiam.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

Si Figura BED *Parabola eſt, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis* C *æqualis eſt velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli ſui* BC *Circulum uniformiter deſcribere poteſt.*



Nam corporis Parabolam *RPB* circa centrum *S* deſcribentis velocitas in loco quovis *P* (per Corol. 7. Prop. XVI) æqualis eſt velocitati corporis dimidio intervalli *SP* Circulum circa idem centrum *S* uniformiter deſcribentis. Minuatur Parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus Parabolicus *PfB* cum recta *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *SP* cum intervallo *BC* coincidat, & conſtabit Propoſitio. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

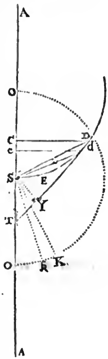
Iiſdem poſitis, dico quod area Figuræ DES, *radio indefinito* SD *deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti Figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore deſcribere poteſt.*

Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *Cc* cadendo deſcribere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in Circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* deſcribere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia Figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *ST*.

Caſ.

Digitized by Google

Caſ. 1. Jam ſi Figura *DES* Circulus eſt vel Hyperbola, biſecetur ejus tranſverſa diameter *AS* in *O*, & erit *SO* dimidium lateris recti. Et quoniam eſt *TC* ad *TD* ut *Cc* ad *Dd*, & *TD* ad *TS* ut *CD* ad *ST*, erit ex æquo *TC* ad *TS* ut $CD \times Cc$ ad $ST \times Dd$. Sed per Corol. 1. Prop. xxxiii, eſt *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*, puta ſi in coitu punctorum *D*, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo *AC* eſt ad (*AO* ſeu) *SK* ut $CD \times Cc$ ad $ST \times Dd$. Porro corporis deſcendentis velocitas in *C* eſt ad velocitatem corporis Circulum intervallo *SC* circa centrum *S* deſcribentis in ſubduplicata ratione *AC* ad (*AO* vel) *SK* (per Prop. xxxiii.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis Circulum *OKk* in ſubduplicata ratione *SK* ad *SC* per Cor. 6. Prop. iv, & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola *Cc* ad arcum *Kk* in ſubduplicata ratione *AC* ad *SC*, id eſt in ratione *AC* ad *CD*. Quare eſt $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea *AC* ad *SK* ut $AC \times Kk$ ad $ST \times Dd$, indeq; $SK \times Kk$ æquale $ST \times Dd$, & $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} ST \times Dd$, id eſt area *KSk* æqualis areæ *SDd*. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ *KSk*, & *SDd*, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis iv) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. *Q. E. D.*



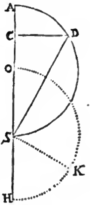
Caſ. 2. Quod ſi Figura *DES* Parabola ſit, invenietur eſſe ut ſupra $CD \times Cc$ ad $ST \times Dd$ ut *TC* ad *TS*, hoc eſt ut 2 ad 1, adeoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale eſſe $\frac{1}{2} ST \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in *C* æqualis eſt velocitati qua Circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uniformiter deſcribi poſſit (per Prop. xxxiv) Et hæc velocitas ad velocitatem qua Circulus radio *SK* deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola *Cc* ad arcum *Kk* (per Corol. 6. Prop. iv) eſt in ſubduplicata ratione *SK* ad $\frac{1}{2} SC$, id eſt, in ratione *SK* ad $\frac{1}{2} CD$. Quare eſt $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4} CD \times Cc$, adeoque æquale $\frac{1}{2} ST \times Dd$, hoc eſt, area *KSk* æqualis areæ *SDd*, ut ſupra. *Q. E. D.*

PROPO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A *cadentis determinare Tempora deſcenſus.*

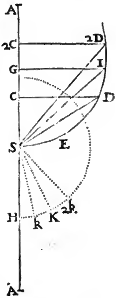


Super diametro *AS* (diſtantia corporis a centro ſub initio) deſcribe Semicirculum *ADS*, ut & huic æqualem Semicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem conſtitue ſectorem *OSK*. Patet per Prop. xxxv, quod corpus cadendo deſcribet ſpatium *AC* eodem Tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum *S* gyrando, deſcribere poteſt arcum *OK*. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato ſurſum vel deorſum projecti definire Tempora aſcenſus vel deſcenſus.

Exeat corpus de loco dato *G* ſecundum lineam *ASG* cum velocitate quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in Circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi poſſet, cape *GA* ad $\frac{1}{2}$ *AS*. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite diſtat, quo caſu Parabola vertice *S*, axe *SC*, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per Prop. xxxiv. Sin ratio illa minor vel major eſt quam 2 ad 1, priore caſu Circulus, poſteriore Hyperbola rectangula ſuper diametro *SA* deſcribi debet. Patet per Prop. xxxiii. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti, deſcribatur Circulus *HKk*, & ad corporis aſcendentis vel deſcendentis loca duo quævis *G*, *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia Conicæ Sectioni vel Circulo in *I* ac *D*.



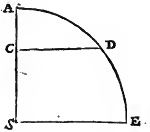
Dein

Dein junctis SI, $S\mathcal{D}$, fiant ſegmentis $SEIS$, $SE\mathcal{D}S$, ſectores HSK, HSk æquales, & per Prop. xxxv, corpus G deſcribet ſpatium GC eodem Tempore quo corpus K deſcribere poteſt arcum Kk. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Poſito quod Vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum a centro, dico quod cadentium Tempora, Velocitates & Spatia deſcripta ſunt arcubus, arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpective proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis A ſecundum rectam AS; & centro virium S, intervallo AS, deſcribatur Circuli quadrans AE, ſitque $C\mathcal{D}$ ſinus rectus arcus cujuſvis $A\mathcal{D}$; & corpus A, Tempore $A\mathcal{D}$, cadendo deſcribet Spatium AC, inque loco C acquiret Velocitatem $C\mathcal{D}$.



Demonſtratur eodem modo ex Propoſitione x, quo Propoſitio xxxii, ex Propoſitione xi demonſtrata fuit.

Corol. 1. Hinc æqualia ſunt Tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem $A\mathcal{D}E$.

Corol. 2. Proinde æqualia ſunt Tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. iv.) æquantur.

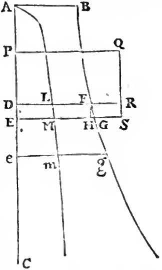
PROPO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Poſita cujuſcunque generis Vi centripeta, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta aſcendentis vel deſcendentis tum Velocitas in locis ſingulis, tum Tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deque loco ejus *E* erigatur ſemper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipſo motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis Velocitas in loco quovis *E* ut areæ curvilineæ *ABGE* latus quadratum. *Q. E. I.*



In *EG* capiatur *EM* lateri quadrato areæ *ABGE* reciproce proportionalis, & ſit *ALM* linea curva quam punctum *M* perpetuo tangit, & erit Tempus quo corpus cadendo deſcribit lineam *AE* ut area curvilinea *ALME*. *Q. E. I.*

Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, ſitque *DLF* locus lineæ *EMG* ubi corpus verſabatur in *D*; & ſi ea ſit vis centripeta, ut areæ *ABGE* latus quadratum ſit ut deſcendentis velocitas, erit area ipſa in duplicata ratione velocitatis, id eſt, ſi pro velocitatibus in *D* & *E* ſcribantur V & V + I, erit area *ABFD* ut VV, & area *ABGE* ut VV + 2 VI + II, & diviſim area *DFGE* ut 2 VI + II, adeoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI+II}{DE}$, id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo *DF* ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, adeoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Eſt autem tempus quo

corpus

Digitized by Google

corpus cadendo deſcribit lineolam *DE*, ut lineola illa directe & velocitas V inverſe, eſtque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverſe, adeoque ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo *DF*. Ergo Vis ipſi *DF* vel *EG* proportionalis facit ut corpus ea cum Velocitate deſcendat quæ ſit ut areæ *ABGE* latus quadratum. *Q. E. D.*

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *DE* deſcribatur, ſit ut velocitas inverſe adeoque ut areæ *ABFD* latus quadratum inverſe; ſitque *DL*, atque adeo area naſcens *DLME*, ut idem latus quadratum inverſe: erit tempus ut area *DLME*, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per Corol. Lem. IV) Tempus totum quo linea *AE* deſcribitur ut area tota *AME*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si *P* ſit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo ſupponitur Gravitas) velocitatem acquirat in loco *D* æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunque cadens acquiſivit eodem loco *D*, & in perpendiculari *DF* capiatur *DR*, quæ ſit ad *DF* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, & compleatur rectangulum *PDRQ*, eique æqualis abſcindatur area *ABFD*; erit *A* locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo *DRSE*, cum ſit area *ABFD* ad aream *DFGE* ut VV ad 2 V I, adeoque ut $\frac{1}{2}$V ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & ſimiliter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, adeoque ut areæ naſcentes *DFGE*, *DRSE*; erunt (ex æquo) areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut ſemiſſes totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.

Corol. 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunque *D* data cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut eſt latus quadratum rectanguli *PQRD* area curvilinea *DFge* vel aucti, ſi locus *e* eſt loco *D* inferior, vel diminuti, ſi is ſuperior eſt, ad latus quadratum rectanguli ſolius *PQRD*, id eſt, ut $\sqrt{PQRD + \text{vel} - DFge}$ ad $\sqrt{PQRD}$.

Digitized by Google

De Motu Corporum

Corol. 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD$+vel−$DFge$, & capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P & cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam PD eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam PE in ſubduplicata ratione PD ad PE, id eſt (lineola DE jamjam naſcente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2} DE$ ſeu $2PD$ ad $2PD + DE$, & diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam DE ut $2PD$ ad DE, adeoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLME$; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam De ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

SECTIO VIII.

De Inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.

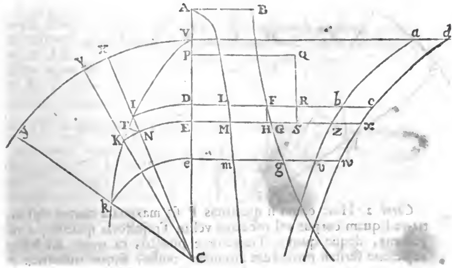
PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

Si corpus, cogente Vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum Velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, Velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Deſcendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C, & moveatur corpus aliud a V in linea curva $VIKk$. Centro C intervallis quibuſvis deſcribantur circuli concentrici DI, EK rectæ AC in D & E, curvæque VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipſi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; ſitque circumferentiarum circulorum intervallum DE vel IN quam minimum, & habeant corpora in D & I velocitates

Digitized by Google

tes æquales. Quoniam diſtantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* & *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; & ſi vis una *IN* (per Legum Corol. 2.) reſolvatur in duas *NT* & *IT*, vis *NT*, agendo ſecundum lineam *NT* corporis curſui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus a curſu rectilineo, facietque ipſum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera *IT*, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit ſibi ipſi proportionalem. Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (ſi ſumantur linearum naſcentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) ſunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* & *IK* deſcribuntur, ob æqualitatem velocita-



tum ſunt ut viæ deſcriptæ *DE* & *IK*, adeoque accelerationes, in curſu corporum per lineas *DE* & *IK*, ſunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id eſt ut *DE quad* & *IT*×*IK rectangulum.* Sed *rectangulum* *IT*×*IK* æquale eſt *IN quadrato*, hoc eſt, æquale *DE quadrato*; & propterea accelerationes in tranſitu corporum a *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur ſunt cor-

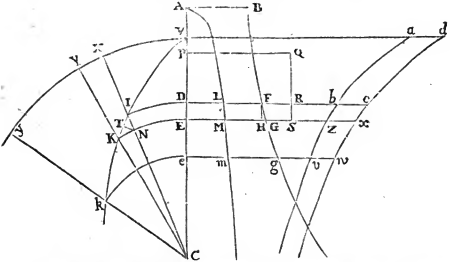
 porum

Digitized by Google

porum velocitates in E & K & eodem argumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. *Q. E. D.*

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel funipendulum oſcilletur, vel impedimento quovis politiſſimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque impedimento vaſis abſolute lubrici idem præſtatur quod vi tranſverſa NT. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantum cogitur de curſu rectilineo diſcedere.



Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima a centro diſtantia, ad quam corpus vel oſcillans vel in Trajectoria quacunque revolvens, deque quovis Trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitque quantitas A diſtantia corporis a centro in alio quovis Orbitæ puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus Index $n-1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque adeo datur. Namque velocitas recta aſcendentis ac deſcendentis (per Prop. XXXIX) eſt in hac ipſa ratione.

PROPO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Poſita cujuſcunque generis Vi centripeta & conceſſis Figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum Tempora motuum in Trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda ſit Trajectoria *VITKk*. Detur Circulus *VXT* centro *C* intervallo quovis *CV* deſcriptus, centroque eodem deſcribantur alii quivis circuli *ID*, *KE* Trajectoriam ſecantes in *I* & *K* rectamque *CV* in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* ſecantem circulos *KE*, *VT* in *N* & *X*, tum rectam *CKT* occurrentem circulo *VXT* in *T*. Sint autem puncta *I* & *K* ſibi invicem viciniſſima, & pergat corpus ab *V* per *I*, *T* & *K* ad *k*; ſitque punctum *A* locus ille de quo corpus aliud cadere debet ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*; & ſtantibus quæ in Propoſitione XXXIX, lineola *IK*, dato tempore quam minimo deſcripta, erit ut velocitas atque adeo ut latus quadratum areæ *ABFD*, & triangulum *ICK* tempori proportionale dabitur, adeoque *KN* erit reciproce ut altitudo *IC*, id eſt, ſi detur quantitas aliqua Q, & altitudo *IC* nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam eſſe magnitudinem ipſius Q ut ſit in aliquo caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut eſt *IK* ad *KN*, & erit in omni caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut *IK* ad *KN*, & *ABFD* ad ZZ ut *IK q*. ad *KN q*. & diviſim $ABFD - ZZ$ ad ZZ ut *IN quad* ad *KN quad*, adeoque $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad (Z ſeu) $\frac{Q}{A}$ ut *IN* ad *KN*; & propterea $A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Unde cum $TX \times XC$ ſit ad $A \times KN$ ut $CX q$ ad AA, erit rectangulum $TX \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX\ quad.}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur ſi in perpendiculo *DF* capiantur ſemper *Db*, *Dc* ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX\ quad.}{2\,AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales reſpective, & deſcribantur curvæ lineæ *ab*, *cd* quas puncta

puncta *b*, *c* perpetuo tangunt; deque puncto *V* ad lineam *AC* erigatur perpendiculum *Vad* abſcindens areas curvilineas *VDba*, *VDcd*, & erigantur etiam ordinatæ *Ez*, *Ex*: quoniam rectangulum $Db \times IN$ ſeu *DbzE* æquale eſt dimidio rectanguli $A \times KN$, ſeu triangulo *ICK*; & rectangulum $Dc \times IN$ ſeu *DcxE* æquale eſt dimidio rectanguli $TX \times XC$, ſeu triangulo *XCT*; hoc eſt, quoniam arearum *VDba*, *VIC* æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ *DbzE*, *ICK*, & arearum *VDcd*, *VCX* æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ *DcxE*, *XCT*, erit area genita *VDba* æqualis areæ genitæ *VIC*, adeoque tempori proportionalis, & area genita *VDcd* æqualis Sectori genito *VCX*. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco *V*, dabitur area ipſi proportionalis *VDba*, & inde dabitur corporis altitudo *CD* vel *CI*; & area *VDcd*, eique æqualis Sector *VCX* una cum ejus angulo *VCI*. Datis autem angulo *VCI* & altitudine *CI* datur locus *I*, in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

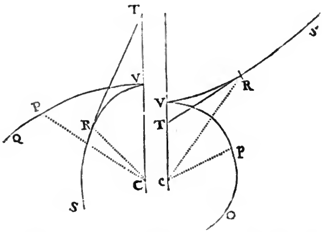
Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id eſt Apſides Trajectoriarum expedite inveniri poſſunt. Sunt enim Apſides puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam *VIK*: id quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, adeoque ubi area *ABFD* æqualis eſt ZZ.

Corol. 2. Sed & angulus *KIN*, in quo Trajectoria alibi ſecat lineam illam *IC*, ex data corporis altitudine *IC* expedite invenitur; nimirum capiendo ſinum ejus ad radium ut *KN* ad *IK*, id eſt, ut Z ad latus quadratum areæ *ABFD*.

Corol. 3. Si centro *C* & vertice principali *V* deſcribatur Sectio quælibet Conica *VRS*, & a quovis ejus puncto *R* agatur Tangens *RT* occurrens axi infinite producto *CV* in puncto *T*; dein juncta *CR* ducatur recta *CP*, quæ æqualis ſit abſciſſæ *CT*, angulumque *VCP* Sectori *VCR* proportionalem conſtituat; tendat autem ad centrum *C* Vis centripeta Cubo diſtantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco *V* juſta cum Velocitate ſecundum lineam rectæ *CV* perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum *P* perpetuo tangit; adeoque ſi Conica ſectio *CVRS* Hyperbola ſit, deſcendet idem ad centrum: Sin ea Ellipſis ſit, aſcendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, ſi corpus quacunque cum Velocitate exeat de loco *V*, & perinde ut incæperit vel oblique deſcendere ad centrum, vel ab eo oblique

Digitized by Google

lique aſcendere, Figura *CVRS* vel Hyperbola ſit vel Ellipſis, inveniri poteſt Trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in data aliqua ratione. Sed &, Vi centripeta in centrifugam verſa,



aſcendet corpus oblique in Trajectoria *VPQ* quæ invenitur capiendo angulum *VCP* Sectori Elliptico *CVRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqualem ut ſupra. Conſequuntur hæc omnia ex Propoſitione præcedente, per Curvæ cujuſdam quadraturam, cujus inventionem, ut ſatis facilem, brevitatis gratia miſſam facio.

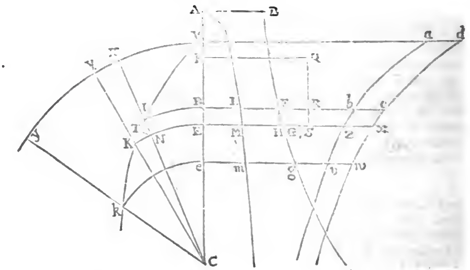
PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Data lege Vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato data cum Velocitate ſecundum datam rectam egreſſi.

Stantibus quæ in tribus Propoſitionibus præcedentibus: exeat corpus de loco *I* ſecundum lineolam *IT*, ea cum Velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco *P* cadendo acquirere poſſet in *D*: ſitque hæc vis uniformis ad vim qua corpus primum

Digitized by Google

primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus verſus *k*; centroque *C* & intervallo *Ck* deſcribatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *ALMm*, *BFGg*, *abzv*, *dcxw*



ordinatim applicatæ *em*, *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo *PDRQ*, dataque lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur curvæ lineæ *BFGg*, *ALMm*, per conſtructionem Problematis XXVII, & ejus Corol. 1. Deinde ex dato angulo *CIT* datur proportio naſcentium *IK*, *KN*, & inde, per conſtructionem Prob. XXVIII, datur quantitas Q, una cum curvis lineis *abzv*, *dcxw*: adeoque completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eique æqualis Sector *XCy*, anguluſque *ICk* & locus *k* in quo corpus tunc verſabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his Propoſitionibus Vim centripetam in receſſu quidem a centro variari ſecundum legem quamcunque quam quis imaginari poteſt, in æqualibus autem a centro diſtantiis eſſe undeque eandem. Atque hactenus Motum corporum in Orbibus immobilibus conſideravimus. Supereſt ut de Motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

SECTIO

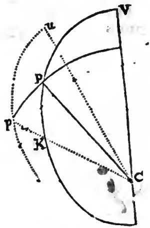
Digitized by Google

SECTIO IX.

De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deque motu Apſidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

Efficiendum eſt ut corpus in Trajectoria quacunque circa centrum Virium revolvente perinde moveri poſſit, atque corpus aliud in eadem Trajectoria quieſcente.



In Orbe *VPK* poſitione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* verſus *K*. A centro *C* agatur ſemper *Cp*, quæ ſit ipſi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem conſtituat; & area quam linea *Cp* deſcribit erit ad aream *VCP* quam linea *CP* ſimul deſcribit, ut velocitas lineæ deſcribentis *Cp* ad velocitatem lineæ deſcribentis *CP*; hoc eſt, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, adeoque in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis ſit quam linea *Cp* in plano immobili deſcribit, manifeſtum eſt quod corpus, cogente juſtæ quantitatis Vi centripeta, revolvi poſſit una cum puncto *p* in Curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam expoſita deſcribit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, & linea *Cu* lineæ *CV*, atque Figura *uCp* Figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* ſemper exiſtens movebitur in

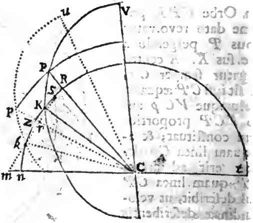
 peri-

Digitized by Google

perimetro Figuræ revolventis *uCp*, eodemque tempore deſcribet arcum ejus *up* quo corpus aliud *P* arcum ipſi ſimilem & æqualem *VP* in Figura quieſcente *VPK* deſcribere poteſt. Quæratur igitur, per Corollarium quintum propoſitionis VI, Vis centripeta qua corpus revolvi poſſit in Curva illa linea quam punctum *p* deſcribit in plano immobili, & ſolvetur Problema. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia Virium, quibus corpus in Orbe quieſcente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri poſſunt, eſt in triplicata ratione communis altitudinis inverſe.



Partibus Orbis quieſcentis *VP*, *PK* ſunto ſimiles & æquales Orbis revolventis partes *up*, *pk*; & punctorum *P*, *K* diſtantia intelligatur eſſe quam minima. A puncto *k* in rectam *pC* demitte perpendiculum *kr*, idemque produc ad *m*, ut ſit *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Quoniam corporum altitudines *PC* & *pC*, *KC* & *kC* ſemper æquantur, manifeſtum eſt quod linearum *PC* & *pC* incrementa vel decrementa ſemper ſint æqualia, ideoque ſi corporum in locis *P* & *p* exiſtentium diſtinguantur motus ſinguli (per Legum Corol. 2.) in binos, quorum hi verſus centrum, ſive ſecundum lineas *PC*, *pC* determinentur, & alteri prioribus tranſverſi ſint, & ſecundum lineas ipſis *PC*, *pC* perpendiculares directionem habeant; motus verſus centrum erunt æquales, & motus tranſverſus corporis *p* erit ad motum tranſverſum corporis *P*, ut motus angularis lineæ *pC*, ad motum angularem lineæ *PC*, id eſt, ut

Digitized by Google

ut angulus VCp ad angulum $VC\mathcal{P}$. Igitur eodem tempore quo corpus $\mathcal{P}$ motu ſuo utroque pervenit ad punctum K, corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur a p verſus C, adeoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea mkr, quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis eſt; & motu tranſverſo acquiret diſtantiam a linea pC, quæ ſit ad diſtantiam quam corpus alterum $\mathcal{P}$ acquirit a linea $\mathcal{P}C$, ut eſt motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis alterius $\mathcal{P}$. Quare cum kr æqualis ſit diſtantiæ quam corpus $\mathcal{P}$ acquirit a linea $\mathcal{P}C$, ſitque mr ad kr ut angulus VCp ad angulum $VC\mathcal{P}$, hoc eſt, ut motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis $\mathcal{P}$, manifeſtum eſt quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita ſe habebunt ubi corpora p & $\mathcal{P}$ æqualiter ſecundum lineas pC & $\mathcal{P}C$ moventur, adeoque æqualibus Viribus ſecundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulum pCn ad angulum pCk ut eſt angulus VCp ad angulus $VC\mathcal{P}$, ſitque nC æqualis kC, & corpus p completo illo tempore revera reperietur in n; adeoque Vi majore urgetur quam corpus $\mathcal{P}$, ſi modo angulus mCp angulo kCp major eſt, id eſt ſi Orbis upk vel movetur in conſequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam ſit dupla ejus qua linea $C\mathcal{P}$ in conſequentia fertur; & Vi minore ſi Orbis tardius movetur in antecedentia. Eſtque Virium differentia ut locorum intervallum mn, per quod corpus illud p ipſius actione, dato illo temporis ſpatio, transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck deſcribi intelligatur Circulus ſecans lineas mr, mn productas in s & t, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoque mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula pCk, pCn dentur magnitudine, ſunt kr & mr, earumque differentia mk & ſumma ms reciproce ut altitudo pC, adeoque rectangulum $mk \times ms$ eſt reciproce ut quadratum altitudinis pC. Eſt & mt directe ut $\frac{1}{2}\, mt$, id eſt, ut altitudo pC. Hæ ſunt primæ rationes linearum naſcentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id eſt lineola naſcens mn, eique proportionalis Virium differentia reciproce ut cubus altitudinis pC. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis $\mathcal{P}$ & p vel K & k, eſt ad vim qua corpus motu Circulari revolvi poſſit ab R ad K eodem tempore quo corpus $\mathcal{P}$ in Orbe immobili deſcribit arcum $\mathcal{P}K$, ut lineola naſcens mn ad ſinum verſum arcus naſcentis RK, id eſt

 ut

 ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt, ſi capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp, ut GG−FF ad FF. Et propterea, ſi centro C intervallo quovis CP vel Cp deſcribatur Sector circularis æqualis areæ toti VPC, quam corpus P tempore quovis in Orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit: differentia virium, quibus corpus P in Orbe immobili & corpus p in Orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo deſcripta ſit area VPC uniformiter deſcribere potuiſſet, ut GG−FF ad FF. Namque Sector ille & area pCk ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

Corol. 2. Si Orbis VPK Ellipſis ſit umbilicum habens C & Apſidem ſummam V; eique ſimilis & æqualis ponatur Ellipſis upk, ita ut ſit ſemper pC æqualis PC, & angulus VCp ſit ad angulum VCP in data ratione G ad F; pro altitudine autem PC vel pC ſcribatur A, & pro Ellipſeos latere recto ponatur 2R: erit vis qua corpus in Ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipſi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in V erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$. Vis autem qua corpus in Circulo ad diſtantiam CV ea cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in Ellipſi revolvens habet in V, eſt ad vim qua corpus in Ellipſi revolvens urgetur in Apſide V, ut dimidium lateris recti Ellipſeos ad Circuli ſemidiametrum CV, adeoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis quæ ſit ad hanc ut GG−FF ad FF, valet $\frac{RGG - RFF}{CV\ cub.}$: eſtque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in V quibus corpus P in Ellipſi immota VPK, & corpus p in Ellipſi mobili upk revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine CV ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$ qua corpus revolvi poteſt in Ellipſi immobili VPK, addatur exceſſus $\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$

qua

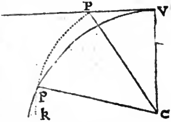
qua corpus in Ellipſi mobili *u p k* iiſdem temporibus revolvi poſſit.

Corol 3. Ad eundem modum colligetur quod, ſi Orbis immobilis *VPK* Ellipſis ſit centrum habens in virium centro *C*; eique ſimilis, æqualis & concentrica ponatur Ellipſis mobilis *u p k*; ſitque 2 R Ellipſeos hujus latus rectum principale, & 2 T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus *V C p* ſemper ſit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires quibus corpora in Ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\,cub.}$ & $\frac{FFA}{T\,cub.}+\frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ reſpective.

Corol. 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, & radius curvaturæ quam Orbis *VPK* habet in *V*, id eſt radius Circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunque immobili *VPK* revolvi poteſt, in loco *V* dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis *P* indefinite dicatur X, altitudine *CP* nominata A, & capiatur G ad F in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta qua corpus idem eoſdem motus in eadem Trajectoria *u p k* circulariter mota temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $X+\frac{VRGG-VRFF}{A\,cub.}$.

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi Orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur ſi ad rectam *CV* poſitione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipſi æqualis agatur *Cp*, conſtituens angulum *VCp*, qui ſit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari poteſt in Curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *C p*. Nam corpus *P*, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi poteſt in recta *VP*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam.



Digitized by Google

curvam Vpk. Eſt autem hæc Curva Vpk eadem cum Curva illa VPQ in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujuſmodi viribus attracta oblique aſcendere.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

Orbium qui ſunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apſidum.

Problema ſolvitur Arithmetice faciendo ut Orbis, quem corpus in Ellipſi mobili (ut in Propoſitionis ſuperioris Corol. 2, vel 3) revolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam Orbis cujus Apſides requiruntur, & quærendo Apſides Orbis quem corpus illud in plano immobili deſcribit. Orbes autem eandem acquirent formam, ſi vires centripetæ quibus deſcribuntur, inter ſe collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V Apſis ſumma, & ſcribantur T pro altitudine maxima CV, A pro altitudine quavis alia CP vel Cp, & X pro altitudinum differentia $CV-CP$; & vis qua corpus in Ellipſi circa umbilicum ſuum C (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæque in Corollario 2. erat ut $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$, id eſt ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\,cub.}$, ſubſtituendo $T-X$ pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\,cub.}$. Reducenda ſimiliter eſt vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit A *cub.*, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem eſſe, adeoque ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$, ſive (ſcribendo $T-X$ pro A in Numeratore) ut $\frac{T\,cub.-3TTX+3TXX-X\,cub.}{A\,cub.}$; & collatis Numeratorum terminis correſpondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGG-RFF+TFF$ ad $T\,cub.$ ut $-FFX$ ad $-3TTX+3TXX-X\,cub.$ ſive ut $-FF$ ad $-3TT+3TX-XX$. Jam cum Orbis ponatur Circulo quam maxime finitimus, coeat Orbis cum Circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum

nitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut −FF ad −3TT ſeu GG ad TT ut FF ad 3TT & viciſſim GG ad FF ut TT ad 3 TT id eſt, ut 1 ad 3; adeoque G ad F, hoc eſt angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in Ellipſi immobili, ab Apſide ſumma ad Apſidem imam deſcendendo conficiat angulum *VCP* (ut ita dicam) gradum 180; corpus aliud in Ellipſi mobili, atque adeo in Orbe immobili de quo agimus, ab Apſide ſumma ad Apſidem imam deſcendendo conficiet angulum *VCp* gradum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id adeo ob ſimilitudinem Orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta deſcribit, & Orbis illius quem corpus in Ellipſi revolvente gyros peragens deſcribit in plano quieſcente. Per ſuperiorem terminorum collationem ſimiles redduntur hi Orbes, non univerſaliter, ſed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in Orbe propemodum circulari revolvens, inter Apſidem ſummam & Apſidem imam conficiet ſemper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, ſeu 103 *gr.* 55 *m.* 23 *ſec.* ad centrum; perveniens ab Apſide ſumma ad Apſidem imam ubi ſemel confecit hunc angulum, & inde ad Apſidem ſummam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & ſic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam eſſe ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} ſeu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n ſignificant dignitatum indices quoſcunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n ſeu $\overline{T-X}^n$ in ſeriem indeterminatam per Methodum noſtram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius $RGG-RFF+TFF-FFX$, fit $RGG-RFF+TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}+\frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, ſeu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & viciſſim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id eſt ut 1 ad n; adeoque G ad F, id eſt angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut

ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus *VCP*, in deſcenſu corporis ab Apſide ſumma ad Apſidem imam in Ellipſi confectus, ſit graduum 180; conficietur angulus *VCp*, in deſcenſu corporis ab Apſide ſumma ad Apſidem imam, in Orbe propemodum Circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apſide ima ad Apſidem ſummam, & ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis a centro, id eſt, ut A ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; adeoque angulus inter Apſidem ſummam & Apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* ſeu 90 *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad Apſidem imam, & completa alia quarta parte ad Apſidem ſummam, & ſic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propoſitione x. manifeſtum eſt. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipſi immobili, cujus centrum eſt in centro virium. Quod ſi vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia, id eſt directe ut $\frac{1}{A}$ ſeu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, adeoque inter Apſidem ſummam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ ſeu 127 *gr.* 16 *m.* 45 *ſec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apſide ſumma ad imam & ab ima ad ſummam perveniet in æternum. Porro ſi vis centripeta ſit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id eſt reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, adeoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ ſeu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de Apſide ſumma diſcedens & ſubinde perpetuo deſcendens, perveniet ad Apſidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo aſcenſu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad Apſidem ſummam: & ſic per vices in æternum.

Exempl. 3. Aſſumentes m & n pro quibuſvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibuſvis datis, ponamus vim centripetam eſſe ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$, id eſt, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}^m + c \text{ in } \overline{T-X}^n}{A\ cub.}$ ſeu (per eandem Methodum noſtram Serierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} \&c.}{A\ cub.}$$

&

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^{m} + cT^{n}$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciſſim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV ſeu T Arithmetice per Unitatem, fit GG ad FF ut $b + c$ ad $mb + nc$, adeoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus VCP inter Apſidem ſummam & Apſidem imam in Ellipſi immobili ſit 180 *gr.* erit angulus VCp inter eaſdem Apſides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^{m} + cA^{n}}{A\,cub.}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^{m} - cA^{n}}{A\,cub.}$, angulus inter Apſides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec ſecus reſolvetur Problema in caſibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in Series convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus $RGG - RFF + TFF - FFX$ ad ipſius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque Unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu Apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad Apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$, cujus Index

 dex eſt $\frac{nn}{mm} - 3$. Id quod per Exempla ſecunda manifeſtum eſt. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in receſſu a centro, decreſcere non poſſe: Corpus tali vi revolvens deque Apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere nunquam perveniet ad Apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens Curvam illam lineam de qua egimus in Cor. 3. Prop. XLI. Sin cœperit illud, de Apſide diſcedens, vel minimum aſcendere; aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad Apſidem ſummam. Deſcribet enim Curvam illam lineam de qua actum eſt in eodem Corol. & in Corol. 6, Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in receſſu a centro, decreſcit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſque vel aſcendet in infinitum. At ſi vis, in receſſu a centro, vel decreſcat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam deſcendet ad centrum uſque, ſed ad Apſidem imam aliquando perveniet: & contra, ſi corpus de Apſide ad Apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum; vis in receſſu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de Apſide ad Apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apſide ſumma ad Apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit; hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{16} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{4} - 3}$ vel $A^{\frac{4}{9} - 3}$, id eſt, reciproce ut $A^{3 - \frac{1}{64}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{16}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{4}}$ vel $A^{3 - \frac{4}{9}}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad Apſidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apſidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9} - 3}$ vel $A^{\frac{9}{4} - 3}$ vel $A^{9 - 3}$ vel $A^{16 - 3}$; & propterea vis aut reciproce ut

$A^{\frac{11}{9}}$

$A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{1}{4}}$, aut directe ut A^6 vel A^{13}. Denique ſi corpus pergendo ab Apſide ſumma ad Apſidem ſummam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoque Apſis illa ſingulis corporis revolutionibus confecerit in conſequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* ſive ut 121 ad 120, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$, & propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ ſeu reciproce ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decreſcit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, ſed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam ſi corpus, vi centripeta quæ ſit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipſi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognoſci poteſt (per Exempla tertia) motus Apſidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut ſi vis qua corpus revolvitur in Ellipſi ſit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA, adeoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A\,cub.}$; erit (in Exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, n æqualis 4, adeoque angulus revolutionis inter Apſides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponatur vim illam extraneam eſſe 357,45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipſi, id eſt c eſſe $\frac{100}{35745}$, exiſtente A vel T æquali 1; & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, ſeu 180,7623, id eſt, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *ſ.* Igitur corpus de Apſide ſumma diſcedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44. *ſ.* perveniet ad Apſidem imam, & hoc motu duplicato ad Apſidem ſummam redibit: adeoque Apſis ſumma ſingulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *ſec.*

Hactenus de Motu corporum in Orbibus quorum plana per centrum Virium tranſeunt. Supereſt ut Motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui Motum gravium tractant, conſiderare ſolent aſcenſus & deſcenſus ponderum, tam obliquos in planis quibuſcunque datis, quam perpendiculares: & pari jure Motus corporum Viribus quibuſcunque cen-

Digitized by Google

tra petentium, & planis excentricis innitentium hic conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, uſurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & Orbitas movendo deſcribunt. Et eadem lege Motus corporum in ſuperficiebus Curvis peractos ſubinde determinamus.

SECTIO X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, deque Funipendulorum Motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Poſita cujuſcunque generis Vi centripeta, datoque tum Virium centro tum Plano quocunque in quo corpus revolvitur, & conceſſis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur Motus corporis de loco dato, data cum Velocitate, ſecundum rectam in Plano illo datam egreſſi.

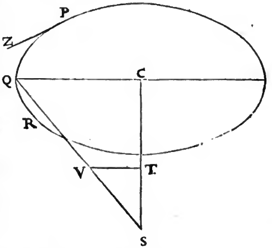
Sit S centrum Virium, SC diſtantia minima centri hujus a Plano dato, P corpus de loco P ſecundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in Trajectoria ſua revolvens, & PQR Trajectoria illa, in Plano dato deſcripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ QS, & ſi in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur verſus centrum S, & agatur VT quæ ſit parallela CQ & occurrat SC in T: Vis SV reſolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires ST, TV; quarum ST trahendo corpus ſecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo ſecundum poſitionem plani, trahit corpus directe verſus punctum C in plano datum, adeoque facit illud in hoc plano perinde moveri ac ſi vis ST tolleretur, & corpus vi ſola TV revolveretur circa centrum C in ſpatio libero. Data autem vi

Digitized by Google

vi centripeta TV qua corpus Q in ſpatio libero circa centrum datum C revolvitur, datur per Prop. XLII, tum Trajectoria PQR quam corpus deſcribit, tum locus Q in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; & contra. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Poſito quod Vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent Ellipſes, & revolutiones Temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultro citroque diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem Temporibus abſolvent.



Nam, ſtantibus quæ in ſuperiore Propoſitione, vis SV qua corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur verſus centrum S eſt ut diſtantia SQ; atque adeo ob proportionales SV & SQ, TV & CQ, vis TV qua corpus trahitur verſus punctum C in Orbis plano datum, eſt ut diſtantia CQ. Vires igitur, quibus corpora in plano PQR verſantia trahuntur verſus punctum C, ſunt pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum S; & propterea corpora movebuntur iiſdem Temporibus, in iiſdem Figuris, in plano quovis PQR circa punctum C, atque in ſpatiis liberis circa centrum S; adeoque (per Corol. 2. Prop. X, & Corol. 2. Prop. XXXVIII) Temporibus ſemper æqua-

Digitized by Google

æqualibus, vel deſcribent Ellipſes in plano illo circa centrum C, vel periodos movendi ultro citroque in lineis rectis per centrum C in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circa axes quoſvis datos per centrum Virium tranſeuntes revolvi, & ea revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique aſcendendo & deſcendendo currant ultro citroque peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſibus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

Si Rota Globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei, quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui Globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut ſumma diametrorum Globi & Rotæ ad ſemidiametrum Globi.

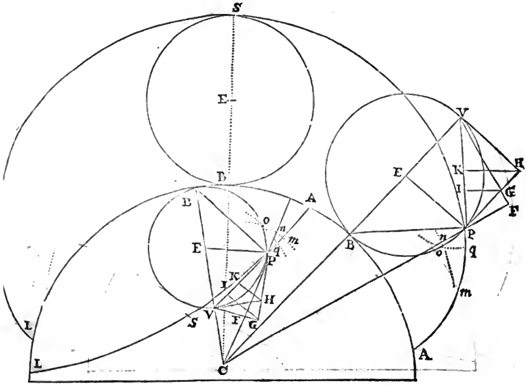
PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si Rota Globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui Globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum Globi & Rotæ ad ſemidiametrum Globi.

Sit

Digitized by Google

Sit *ABL* Globus, *C* centrum ejus, *BPV* Rota ei inſiſtens, *E* centrum Rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro Rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo *ABL* ab *A* per *B* verſus *L*, & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* ſibi invicem ſemper æquentur, atque punctum illud *P* in perimetro Rotæ datum interea deſcribere Viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* Via tota curvilinea deſcripta ex quo Rota Globum tetigit in *A*, & erit Viæ hujus longitudo *AP* ad duplum

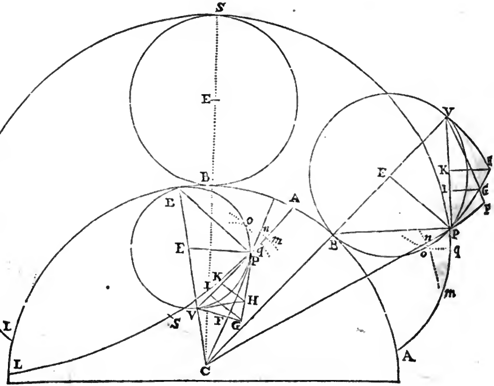


ſinum verſum arcus $\frac{1}{2}$ *PB*, ut 2 *CE* ad *CB*. Nam recta *CE* (ſi opus eſt producta) occurrat Rotæ in *V*, junganturque *CP*, *BP*, *EP*, *VP*, & in *CP* productam demittatur normalis *VF*. Tangant *PH*, *VH* Circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*, ſecetque *PH* ipſam *VF* in *G*, & ad *VP* demittantur normales *GI*, *HK*. Centro

Digitized by Google

Centro item *C* & intervallo quovis deſcribatur circulus *nom* ſecans rectam *CP* in *n*, Rotæ perimetrum *Bp* in *o*, & Viam curvilineam *AP* in *m*; centroque *V* & intervallo *Vo* deſcribatur circulus ſecans *VP* productam in *q*.

Quoniam Rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus *B*, manifeſtum eſt quod recta *BP* perpendicularis eſt ad



lineam illam curvam *AP* quam Rotæ punctum *P* deſcribit, atque adeo quod recta *VP* tanget hanc curvam in puncto *P*. Circuli *nom* radius ſenſim auctus vel diminutus æquetur tandem diſtantiæ *CP*; &, ob ſimilitudinem Figuræ evaneſcentis *Pnomq* & Figuræ *PFGVI*, ratio ultima lineolarum evaneſcentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*, id

id eſt, ratio mutationum momentanearum curvæ *AP*, rectæ *CP*, arcus circularis *BP*, ac rectæ *VP*, eadem erit quæ linearum *PV*, *PF*, *PG*, *PI* reſpective. Cum autem *VF* ad *CF* & *VH* ad *CV* perpendiculares ſunt, angulique *HVG*, *VCF* propterea æquales; & angulus *VHG* (ob angulos quadrilateri *HVEP* ad *V* & *P* rectos) angulo *CEP* æqualis eſt, ſimilia erunt triangula *VHG*, *CEP*; & inde fiet ut *EP* ad *CE* ita *HG* ad *HV* ſeu *HP* & ita *KI* ad *KP*, & compoſite vel diviſim ut *CB* ad *CE* ita *PI* ad *PK*, & duplicatis conſequentibus ut *CB* ad 2 *CE* ita *PI* ad *PV*, atque ita adeo *Pq* ad *Pm*. Eſt igitur decrementum lineæ *VP*, id eſt, incrementum lineæ *BV*−*VP* ad incrementum lineæ curvæ *AP* in data ratione *CB* ad 2 *CE*, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines *BV*−*VP* & *AP*, incrementis illis genitæ, ſunt in eadem ratione. Sed, exiſtente *BV* radio, eſt *VP* co-ſinus anguli *BVP* ſeu $\frac{1}{2}$ *BEP*, adeoque *BV*−*VP* ſinus verſus ejuſdem anguli; & propterea in hac Rota, cujus radius eſt $\frac{1}{2}$ *BV*, erit *BV*−*VP* duplus ſinus verſus arcus $\frac{1}{2}$·*BP*. Ergo *AP* eſt ad duplum ſinum verſum arcus $\frac{1}{2}$ *BP* ut 2 *CE* ad *CB*. *Q. E. D.*

Lineam autem *AP* in Propoſitione priore Cycloidem extra Globum, alteram in poſteriore Cycloidem intra Globum diſtinctionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc ſi deſcribatur Cyclois integra *ASL* & biſecetur ea in *S*, erit longitudo partis *PS* ad longitudinem *VP* (quæ duplus eſt ſinus anguli *VBP*, exiſtente *EB* radio) ut 2 *CE* ad *CB*, atque adeo in ratione data.

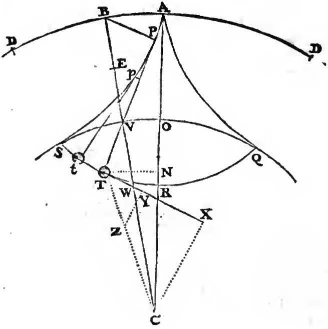
Corol. 2. Et longitudo ſemiperimetri Cycloidis *AS* æquabitur lineæ rectæ quæ eſt ad Rotæ diametrum *BV*, ut 2 *CE* ad *CB*.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut Corpus pendulum oſcilletur in Cycloide data.

Intra Globum *QVS*, centro *C* deſcriptum, detur Cyclois *QRS* biſecta in *R* & punctis ſuis extremis *Q* & *S* ſuperficiei Globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* biſecans arcum *QS* in *O*, & producatur ea ad *A*, ut ſit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* in-

tervallo CA deſcribatur Globus exterior ABD, & intra hunc Globum a Rota, cujus diameter ſit AO, deſcribantur duæ Semicycloides AQ, AS, quæ Globum interiorem tangant in Q & S & Globo exteriori occurrant in A. A puncto illo A, Filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T, & ita intra Semicycloides AQ, AS oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo AR,



Filum parte ſui ſuperiore AP applicetur ad Semicycloidem illam APS verſus quam peragitur motus, & circum eam ceu obſtaculum flectatur, parteque reliqua PT cui Semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oſcillabitur in Cycloide data QRS. *Q. E. F.*

Occurrat enim Filum PT tum Cycloidi QRS in T, tum circulo QOS in V, agaturque CV; & ad Fili partem rectam PT, e punctis extremis P ac T, erigantur perpendicula PB, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet, ex conſtructione & geneſi ſimilium Figurarum AS, SR, perpendicula illa PB, TW abſcindere de CV longitudines VB, VW Rotarum diametris OA, OR æquales. Eſt igitur TP ad VP (duplum ſinum anguli VBP exiſtente $\frac{1}{2}BV$ radio)

dio) ut *BW* ad *BV*, ſeu *AO*+*OR* ad *AO*, id eſt (cum ſint *CA* ad *CO*, *CO* ad *CR* & diviſim *AO* ad *OR* proportionales,) ut *CA*+*CO* ad *CA* vel, ſi biſecetur *BV* in *E*, ut 2*CE* ad *CB*. Proinde, per Corol. 1. Prop. XLIX, longitudo partis rectæ Fili *PT* æquatur ſemper Cycloidis arcui *PS*, & Filum totum *APT* æquatur ſemper Cycloidis arcui dimidio *APS*, hoc eſt (per Corol. 2. Prop. XLIX) longitudini *AR*. Et propterea viciſſim ſi Filum manet ſemper æquale longitudini *AR* movebitur punctum *T* in Cycloide data *QRS*. *Q. E. D.*

Corol. Filum *AR* æquatur Semicycloidi *AS*, adeoque ad ſemidiametrum *AC* eandem habet rationem quam ſimilis illi Semicyclois *SR* habet ad ſemidiametrum *CO*.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si Vis centripeta tendens undique ad Globi centrum C *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque a centro, & hac ſola Vi agente corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro Cycloidis* QRS: *dico quod oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt Tempora.*

Nam in Cycloidis tangentem *TW* infinite productam cadat perpendiculum *CX* & jungatur *CT*. Quoniam vis centripeta qua corpus *T* impellitur verſus *C* eſt ut diſtantia *CT*, atque hæc (per Legum Corol. 2.) reſolvitur in partes *CX*, *TX*, quarum *CX* impellendo corpus directe a *P* diſtendit filum *PT* & per ejus reſiſtentiam tota ceſſat, nullum alium edens effectum; pars autem altera *TX*, urgendo corpus tranſverſim ſeu verſus *X*, directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifeſtum eſt quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, ſit ſingulis momentis ut longitudo *TX*, id eſt, (ob datas *CV*, *WV* iiſque proportionales *TX*, *TW*,) ut longitudo *TW*, hoc eſt (per Corol. 1. Prop. XLIX,) ut longitudo arcus Cycloidis *TR*. Pendulis igitur duobus *APT*, *Apt* de perpendiculo *AR* inæqualiter deductis & ſimul dimiſſis, accelerationes eorum ſemper erunt ut arcus deſcribendi *TR*, *tR*. Sunt autem partes ſub initio deſcriptæ ut accelerationes, hoc eſt, ut totæ ſub initio deſcribendæ, & propterea partes quæ manent deſcriben-

 dæ

Digitized by Google

dæ & accelerationes ſubſequentes, his partibus proportionales, ſunt etiam ut totæ; & ſic deinceps. Sunt igitur accelerationes atque adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus deſcriptæ parteſque deſcribendæ, ſemper ut totæ; & propterea partes deſcribendæ datam ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt, corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumque viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eoſdem arcus Cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis a viribus iiſdem a quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atque adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum Cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumque perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas tam totas quam dimidias iiſdem temporibus ſemper peragent. *Q. E. D.*

Corol. Vis qua corpus *T* in loco quovis *T* acceleratur vel retartur in Cycloide, eſt ad totum corporis ejuſdem Pondus in loco altiſſimo *S* vel *Q*, ut Cycloidis arcus *TR* ad ejuſdem arcum *SR* vel *QR*.

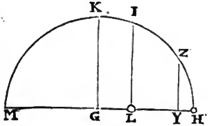
PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire & Velocitates Pendulorum in locis ſingulis, & Tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.

Centro quovis *G*, intervallo *GH* Cycloidis arcum *RS* æquante, deſcribe ſemicirculum *HKMG* ſemidiametro *GK* biſectum. Et ſi vis centripeta, diſtantiis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum *G*, ſitque ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro Globi *QOS* (*Vide Fig. Prop.* L.) ad ipſius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco ſupremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis *TR*, *LG* ſemper proportionales, atque adeo, ſi æquantur *TR* & *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa deſcribere ſpatia *ST*, *HL* æqualia ſub initio, adeoque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare, per Prop. XXXVIII, tempus quo corpus deſcribit arcum *ST* eſt ad tempus oſcil-

Digitized by Google

oſcillationis unius, ut arcus HI (tempus quo corpus H perveniet ad L) ad ſemiperipheriam HKM (tempus quo corpus H perveniet ad M.) Et velocitas corporis penduli in loco T eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo R, (hoc eſt, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, ſeu incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG, arcubus HI, HK æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK, ſive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad SR. Unde cum, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus arcus totis oſcillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus deſcripti in oſcillationibus univerſis. Quæ erant primo invenienda.



Oſcillentur jam Funipendula corpora in Cycloidibus diverſis intra Globos diverſos, quorum diverſæ ſunt etiam Vires abſolutæ, deſcriptis: &, ſi Vis abſoluta Globi cujuſvis QOS dicatur V, Vis acceleratrix qua Pendulũ urgetur in circumferentia hujus Globi, ubi incipit directe verſus centrum ejus moveri, erit ut diſtantia Corporis penduli a centro illo & Vis abſoluta Globi conjunctim, hoc eſt, ut $CO \times V$. Itaque lineola HY, quæ ſit ut hæc Vis acceleratrix $CO \times V$, deſcribetur dato tempore; &, ſi erigatur normalis YZ circumferentiæ occurrens in Z, arcus naſcens HZ denotabit datum illud tempus. Eſt autem arcus hic naſcens HZ in ſubduplicata ratione rectanguli GHY, adeoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde Tempus oſcillationis integræ in Cycloide QRS (cum ſit ut ſemiperipheria HKM, quæ oſcillationem illam integram denotat, directe, utque arcus HZ, qui datum tempus ſimiliter denotat, inverſe) fiet ut GH directe & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverſe, hoc eſt, ob æquales GH & SR, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ſive (per Corol. Prop. L) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque Oſcillationes in Globis & Cycloidibus omnibus, quibuſcunque cum Viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione longitudinis Fili directe, & ſubduplicata ratione diſtantiæ inter punctum ſuſpenſionis & centrum Globi.

Globi inverſe, & ſubduplicata ratione Vis abſolutæ Globi etiam inverſe. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam Oſcillantium, Cadentium & Revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi Rotæ, qua Cyclois intra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi, Cyclois evadet Linea recta per centrum globi tranſiens, & Oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hac recta. Unde datur tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem deſcribit. Eſt enim hoc tempus (per Caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in Cycloide quavis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam conſectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam ſi Globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus ſuperficies ſphærica in planum, Viſque centripeta aget uniformiter ſecundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois noſtra abibit in Cycloidem vulgi. Iſto autem in caſu longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum deſcribens; ut invenit *Wrennus:* Et Pendulum inter duas ejuſmodi Cycloides in ſimili & æquali Cycloide temporibus æqualibus Oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius.* Sed & Deſcenſus gravium, tempore Oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem Propoſitiones a nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis deſcribunt motu Clavorum, perimetris ſuis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ ſuſpenſa, in Cycloidibus intra globos Oſcillari debent, ut Oſcillationes omnes evadant Iſochronæ. Nam Gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu a ſuperficie Terræ, ſurſum quidem in duplicata ratione diſtantiarum a centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

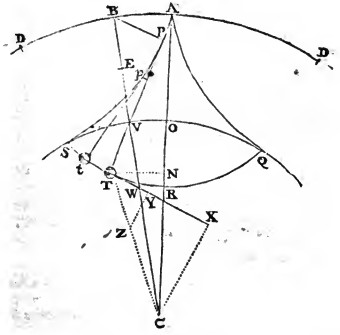
PROPO-

Digitized by Google

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

Conceſſis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Vires quibus corpora in datis curvis lineis Oſcillationes ſemper Iſochronas peragent.

Oſcilletur corpus *T* in curva quavis linea *STRQ*, cujus axis ſit *OR* tranſiens per virium centrum *C*. Agatur *TX* quæ curvam illam in corporis loco quovis *T* contingat, inque hac tangente *TX*



capiatur *TY* æqualis arcui *TR*. Nam longitudo arcus illius ex Figurarum quadraturis (per Methodos vulgares) innoteſcit. De puncto *T* educatur recta *YZ* tangenti perpendicularis. Agatur *CT* perpendiculari illi occurrens in *Z*, & erit Vis centripeta proportionalis rectæ *TZ*. *Q. E. I.*

Nam

Nam ſi vis, qua corpus trahitur de *T* verſus *C*, exponatur per rectam *TZ* captam ipſi proportionalem, reſolvetur hæc in vires *TY*, *YZ*; quarum *YZ* trahendo corpus ſecundum longitudinem Fili *PT*, motum ejus nil mutat, vis autem altera *TY* motum ejus in curva *STRQ* directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc ſit ut via deſcribenda *TR*, accelerationes corporis vel retardationes in Oſcillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus *T* Filo rectilineo *AT* a centro *A* pendens, deſcribat arcum circularem *STRQ*, & interea urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum a vi aliqua, quæ ſit ad vim uniformem Gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus ſinum *TN*: æqualia erunt Oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, ſimilia erunt triangula *ATN*, *ZTY*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut *TY* ad *TN*; hoc eſt, (ſi Gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *AT*) vis *TZ*, qua Oſcillationes evadent Iſochronæ, erit ad vim Gravitatis *AT*, ut arcus *TR* ipſi *TY* æqualis ad arcus illius ſinum *TN*.

Corol. 2. Igitur in Horologiis, ſi vires a Machina in Pendulum ad motum conſervandum impreſſæ ita cum vi Gravitatis componi poſſint, ut vis tota deorſum ſemper ſit ut linea quæ oritur applicando rectangulum ſub arcu *TR* & radio *AR* ad ſinum *TN*, Oſcillationes omnes erunt Iſochronæ.

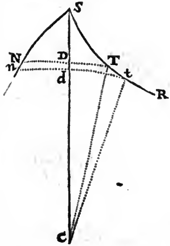
PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Conceſſis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Tempora quibus corpora Vi qualibet centripeta in lineis quibuſcunque curvis, in plano per centrum Virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.

Deſcendat corpus de loco quovis *S* per lineam quamvis curvam *STtR*, in plano per virium centrum *C* tranſeunte datam. Jungatur *CS* & dividatur eadem in partes innumeras æquales, ſitque *Dd* partium

Digitized by Google

partium illarum aliqua. Centro *C*, intervallis *CD*, *Cd* deſcribantur circuli *DT*, *dt*, lineæ curvæ *STtR* occurrentes in *T* & *t*. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine *CS* de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine *CT*, per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus deſcribit lineolam *Tt*, eſt ut lineolæ hujus longitudo (id eſt ut ſecans anguli *tTC*) directe, & velocitas inverſe. Tempori huic proportionalis ſit ordinatim applicata *DN* ad rectam *CS* per punctum *D* perpendicularis, & ob datam *Dd* erit rectangulum *Dd*×*DN*, hoc eſt area *DNnd*, eidem tempori proportionale. Ergo ſi *SNn* ſit curva illa linea quam punctum *N* perpetuo tangit, erit area *SNDS* proportionalis tempori quo corpus deſcendendo deſcripſit lineam *ST*; proindeque ex inventa illa area dabitur Tempus. *Q. E. I.*

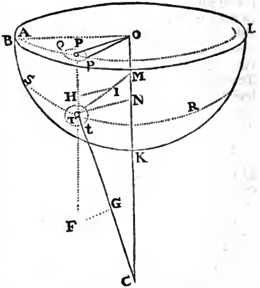


PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in ſuperficie quacunque curva, cujus axis per centrum Virium tranſit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.

Sit *BSKL* ſuperficies curva, *T* corpus in ea revolvens, *STtR* Trajectoria quam corpus in eadem deſcribit, *S* initium Trajectoriæ, *OMNK* axis ſuperficiei curvæ, *TN* recta a corpore in axem perpendicularis, *OP* huic parallela & æqualis a puncto *O* quod in axe datur educta, *AP* veſtigium Trajectoriæ a puncto *P* in lineæ volubilis *OP* plano *AOP* deſcriptum, *A* veſtigii initium puncto *S* reſpondens, *TC* recta a corpore ad centrum ducta; *TG* pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum *C* proportionalis; *TM* recta ad ſuperficiem curvam perpendicularis, *TI* pars ejus vi preſſionis, qua corpus urget ſuperficiem viciſſimque urgetur verſus *M*

a ſuperficie, proportionalis; *PHTF* recta axi parallela per corpus tranſiens, & *GF*, *IH* rectæ a punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demiſſæ. Dico jam quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus deſcripta, ſit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per Legum Corol. 2.) reſolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *TF*, *TH* agendo ſecundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant ſolummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quatenus ſecundum poſitionem plani factus, hoc eſt, motus puncti *P* quo Trajectoriæ veſtigium *AP* in hoc plano deſcribitur, idem eſt ac ſi vires *TF*, *TH* tollerentur, & corpus ſolis viribus *FG*, *HI* agitaretur; hoc eſt, idem ac ſi corpus in plano *AOP*, vi centripeta ad centrum *O* tendente & ſummam virium *FG* & *HI* æquante, deſcriberet curvam *AP*. Sed vi tali deſcribitur area *AOP* (per Prop. 1.) tempori proportionalis. *Q.E.D.*



Corol. Eodem argumento ſi corpus a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quavis recta *CO* data tendentibus, deſcriberet in ſpatio libero lineam quamcunque curvam *ST*; foret area *AOP* tempori ſemper proportionalis.

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Conceſſis Figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum lege Vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curva cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt Trajectoria quam corpus in eadem ſuperficie deſcribet, de loco dato, data cum Velocitate, verſus plagam in ſuperficie illa datam egreſſum.

Stanti-

Stantibus quæ in ſuperiore Propoſitione conſtructa ſunt, exeat corpus de loco *S* in Trajectoriam inveniendam *STtR*; &, ex data ejus velocitate in altitudine *SC*, dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine *TC*. Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, deſcribat corpus Trajectoriæ ſuæ particulam *Tt*, ſitque *Pp* veſtigium ejus in plano *AOP* deſcriptum. Jungatur *Op*, & Circelli centro *T* intervallo *Tt* in ſuperficie curva deſcripti ſit *PpQ* veſtigium Ellipticum in eodem plano *OAPp* deſcriptum. Et ob datum magnitudine & poſitione Circellum, dabitur Ellipſis illa *PpQ*. Cumque area *POp* ſit tempori proportionalis, atque adeo ex dato tempore detur, dabitur *Op* poſitione, & inde dabitur communis ejus & Ellipſeos interſectio *p*, una cum angulo *OPp*, in quo Trajectoriæ veſtigium *APp* ſecat lineam *OP*. Inde autem invenietur Trajectoriæ veſtigium illud *APp*, eadem methodo qua curva linea *VIKk*, in Propoſitione XLI, ex ſimilibus datis inventa fuit. Tum ex ſingulis veſtigii punctis *P* erigendo ad planum *AOP* perpendicula *PT* ſuperficiei curvæ occurrentia in *T*, dabuntur ſingula Trajectoriæ puncta *T*. *Q. E. I.*

SECTIO XI.

De Motu Corporum Viribus centripetis ſe mutuo petentium.

Hactenus expoſui Motus corporum attractorum ad centrum Immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri ſolent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neque attrahens poſſit quieſcere neque attractum, ſi duo ſint corpora, ſed ambo (per Legum Corollarium quartum) quaſi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & ſi plura ſint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia ſe mutuo attrahant) hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de cauſa jam pergo Motum exponere corporum ſe mutuo trahentium, conſiderando Vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſice loquamur, verius dicantur Impulſus. In Mathematicis enim jam verſamur, & propterea miſſis diſputationibus Phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

Digitized by Google

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

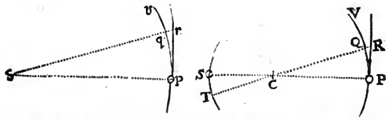
Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum ſe mutuo, Figuras ſimiles.

Sunt enim diſtantiæ a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atque adeo in data ratione ad invicem, & componendo, in data ratione ad diſtantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ diſtantiæ circum terminos ſuos communi motu angulari, propterea quod in directum ſemper jacentes non mutant inclinationem ad ſe mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ ſunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, Figuras circum eoſdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quieſcunt vel motu quovis non angulari moventur) deſcribunt omnino ſimiles. Proinde ſimiles ſunt Figuræ quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo Viribus quibuſvis ſe mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuo, poteſt Figura ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, Viribus iiſdem deſcribi.

Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T* deque *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipſis



SP, *TQ* æquales & parallelæ ducantur ſemper *sp*, *sq*; & Curva *pqv* quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, deſcribit,

deſcribit, erit ſimilis & æqualis Curvis quas corpora *S*, *P* deſcribunt circum ſe mutuo: proindeque (per Theor. xx) ſimilis Curvis *ST* & *PQV*, quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum *C*: id adeo quia proportiones linearum *SC*, *CP* & *SP* vel *sp* ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per Legum Corollarium quartum, vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quieſcit, inque *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR* & *pr* Curvas *PQ* & *pq* in *P* & *p*, & producantur *CQ* & *sq* ad *R* & *r*. Et, ob ſimilitudinem Figurarum *CPRQ*, *sprq*, erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, adeoque in data ratione. Proinde ſi vis qua corpus *P* verſus corpus *S*, atque adeo verſus centrum intermedium *C* attrahitur, eſſet ad vim qua corpus *p* verſus centrum *s* attrahitur in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq*, per intervalla ipſis proportionalia *RQ*, *rq*; adeoque vis poſterior efficeret ut corpus *p* gyraretur in Curva *pqv*, quæ ſimilis eſſet Curvæ *PQV*, in qua vis prior efficit ut corpus *P* gyretur, & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem diſtantiarum *SP*, *sp*) ſibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus poſterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, idque in ſubduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per Lemma decimum) ſpatia, ipſo motus initio deſcripta, ſunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* eſſe ad velocitatem corporis *P* in ſubduplicata ratione diſtantiæ *sp* ad diſtantiam *CP*, eo ut temporibus quæ ſint in eadem ſubduplicata ratione deſcribantur arcus *pq*, *PQ*, qui ſunt in ratione integra: Et corpora *P*, *p* viribus æqualibus ſemper attracta deſcribent circum centra quieſcentia *C* & *s* Figuras ſimiles *PQV*, *pqv*, quarum poſterior *pqv* ſimilis eſt & æqualis Figuræ quam corpus *P* circum corpus mobile *S* deſcribit. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum ſpatio in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium ſextum, motus omnes in hoc ſpatio peragentur ut prius, adeoque corpora deſcribent

bent circum ſe mutuo Figuras eaſdem ac prius, & propterea Figuræ *pqv* ſimiles & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo Viribus diſtantiæ ſuæ proportionalibus ſe mutuo trahentia, deſcribunt (per Prop. x,) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, Ellipſes concentricas: & vice verſa, ſi tales Figuræ deſcribuntur, ſunt Vires diſtantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus deſcribunt (per Prop. xi, xii, xiii) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, Sectiones conicas umbilicum habentes in centro circum quod Figuræ deſcribuntur. Et vice verſa, ſi tales Figuræ deſcribuntur, Vires centripetæ ſunt quadrato diſtantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad ſe mutuo ductis, deſcribunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S *&* P *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium Tempus periodicum eſſe ad Tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis & Figuris quæ corpora circum ſe mutuo deſcribunt Figuram ſimilem & æqualem deſcribentis, in ſubduplicata ratione corporis alterius* S, *ad ſummam corporum* S + P.

Namque, ex demonſtratione ſuperioris Propoſitionis, tempora quibus arcus quivis ſimiles *PQ* & *pq* deſcribuntur, ſunt in ſubduplicata ratione diſtantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc eſt, in ſubduplicata ratione corporis *S* ad ſummam corporum *S* + *P*. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles *PQ* & *pq* deſcribuntur, hoc eſt, tempora tota quibus Figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eadem ſubduplicata ratione. *Q. E. D.*

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S *&* P, *Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipſeos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *deſcribit, Axis principalis erit ad Axem principalem Ellipſeos, quam corpus idem* P *circa alterum quieſcens* S *eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum* S + P *ad primam duarum medie proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum* S.

Nam ſi deſcriptæ Ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema ſuperius) forent in ſubduplicata ratione corporis S ad ſummam corporum $S+P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipſi poſteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipſeos autem axis principalis (per Prop. XV.) minuetur in ratione cujus hæc eſt ſeſquiplicata, id eſt in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ eſt triplicata; adeoque erit ad axem principalem Ellipſeos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S ad $S+P$. Et inverſe, axis principalis Ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem principalem deſcriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primam duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo Viribus quibuſvis ſe mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde ſe habebunt ac ſi non traherent ſe mutuo, ſed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto Viribus iiſdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ corporum a centro illo communi atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium,

Digitized by Google

dium, adeoque eædem ſunt ac ſi a corpore intermedio manarent. *Q. E. D.*

Et quoniam data eſt ratio diſtantiæ corporis utriuſvis a centro illo communi ad diſtantiam corporis ejuſdem a corpore altero, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex una diſtantia & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera diſtantia & quantitatibus totidem datis datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, qua corpus unum ab altero trahitur, ſit directe vel inverſe ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hac diſtantia & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverſe ut corporis attracti diſtantia a centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel denique ut quantitas ex hac diſtantia & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt, Vis trahentis eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ utriuſque. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare Motus.

Corpora (per Theorema noviſſimum) perinde movebuntur ac ſi a corpore tertio, in communi gravitatis centro conſtituto, traherentur; & centrum illud ipſo motus initio quieſcet per Hypotheſin; & propterea (per Legum Corol. 4.) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus corporum (per Prob. XXV,) perinde ac ſi a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuo trahentium. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, deque locis datis, ſecundum datas rectas, datis cum Velocitatibus exeunt, determinare Motus.

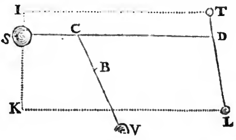
Ex

Ex datis corporum motibus ſub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus ſpatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii. Motus autem ſubſequentes (per Legum Corollarium quintum, & Theorema noviſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum una cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuo, ſed a corpore tertio ſito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili, de loco dato, ſecundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus eſt motus per Problema nonum & viceſimum ſextum: & habebitur ſimul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille Syſtematis ſpatii & corporum in eo gyrantium motus progreſſivus ſupra inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

Viribus quibus Corpora ſe mutuo trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum a centris: requiruntur Motus plurium Corporum inter ſe.

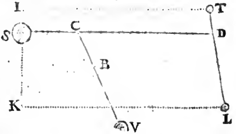
Ponantur primo corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Deſcribent hæc (per Corollarium primum Theorematis XXI) Ellipſes centra habentes in *D*, quarum magnitudo ex Problemate V, innoteſcit.



Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST*, *SL*, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis *ST* (per Legum Cor. 2.) reſolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires autem *DT*, *DL*, quæ ſunt ut ipſarum ſumma *TL*, atque adeo ut vires acceleratrices quibus corpora *T* & *L* ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum *T* & *L*, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis *DT* ac *DL* proportionales, ut prius, ſed

Digitized by Google

viribus prioribus majores; adeoque (per Corol. 1. Prop. x. & Corol. 1 & 8. Prop. iv) efficiunt ut corpora illa deſcribant Ellipſes ut prius, ſed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD*, actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas *TI*, *LK*, ipſi *DS* parallelas, nil mutant ſitus eorum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam *IK*; quam ductam concipe per medium corporis *S*, & lineæ *DS* perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam *IK* acceſſus faciendo ut Syſtema corporum *T* & *L* ex una parte, & corpus *S* ex altera, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum *C*. Tali motu corpus *S* (eo quod ſumma virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, diſtantiæ *CS* proportionalium, tendit verſus centrum *C*) deſcribit Ellipſin circa idem *C*; & punctum *D*, ob proportionales *CS*, *CD*, deſcribet Ellipſin conſimilem e regione. Corpora autem *T* & *L* viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, poſterius poſteriore) æqualiter & ſecundum lineas parallelas *TI* & *LK* (ut dictum eſt) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile *D* Ellipſes ſuas deſcribere, ut prius. *Q. E. I.*



Addatur jam corpus quartum *V*, & ſimili argumento concludetur hoc & punctum *C* Ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis *B* deſcribere; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L* & *S* circa centra *D* & *C*, ſed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

Hæc ita ſe habent ubi corpora *T* & *L* trahunt ſe mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum *B*, in plano immobili deſcribunt. *Q. E. I.*

PRO-

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum Vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in Ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quam proxime.

In Propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in Ellipſibus accurate. Quo magis recedit Lex virium a Lege ibi poſita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt ut corpora, ſecundum Legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in Ellipſibus accurate, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multum ab Ellipſibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum, abſque errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora uſque donec error iſte & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores, atque adeo donec Orbes cum Ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, abſque errore qui non ſit minor quovis dato. *Q. E. O.*

Cas. 2. Fingamus jam Syſtema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuo revolventium corporum Syſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut Syſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur efficiunt: manifeſtum eſt quod, ex attractionibus in corpus maximum,

Digitized by Google

nulla prorſus orietur mutatio motus attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; &, augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ reſpectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores ſint quam datæ quævis, perſeverabunt motus partium Syſtematis inter ſe abſque erroribus qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, Syſtema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc eſt, centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipſin fortiore,) & Radio ad maximum ducto deſcribet areas temporibus proportionales, abſque ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ (perexiguæ ſane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad caſus magis compoſitos in infinitum.

Corol. 1. In caſu ſecundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Syſtema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Syſtematis inter ſe; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major eſt inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Syſtematis verſus corpus omnium maximum, non ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum a corpore illo maximo; præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major ſit quam inæqualitas proportionis diſtantiarum a corpore maximo: Nam ſi vis acceleratrix, æqualiter & ſecundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter ſe, neceſſe eſt ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque ſit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Exceſſus impulſuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, neceſſario mutabunt ſitum eorum inter ſe. Et hæc perturbatio, addita perturbationi quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde ſi Syſtematis hujus partes in Ellipſibus vel Circulis ſine perturbatione inſigni moveantur; manifeſtum eſt, quod eædem

Digitized by Google

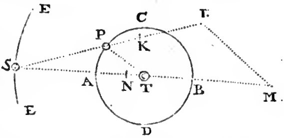
eædem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſime, aut urgentur æqualiter & ſecundum lineas parallelas quamproxime.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

Si Corpora tria, quorum Vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum, ſe mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & Figuram ad formam Ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quam ſi maximum illud vel a minoribus non attractum quieſcat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitetur.

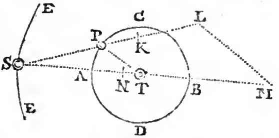
Liquet fere ex demonſtratione Corollarii ſecundi Propoſitionis præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latius cogente ſic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora P & S in eodem plano circa maximum T, quorum P deſcribat Orbem interiorem PAB, & S exteriorem SE. Sit SK mediocris diſtantia corporum P & S; & corporis P verſus



S attractio acceleratrix in mediocri illa diſtantia exponatur per eandem. In duplicata ratione SK ad SP capiatur SL ad SK, & erit SL attractio acceleratrix corporis P verſus S in diſtantia quavis SP. Junge PT, eique parallelam age LM occurrentem ST in M, & attractio SL reſolvetur (per Legum Corol 2.) in attractiones SM, LM. Et ſic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici: una

una tendente ad *T* & oriunda a mutua attractione corporum *T* & *P*. Hac vi ſola corpus *P* circum corpus *T*, ſive immotum ſive hac attractione agitatum, deſcribere deberet & areas, radio *PT*, temporibus proportionales, & Ellipſin cui umbilicus eſt in centro corporis *T*. Patet hoc per Prop. xi. & Corollaria 2 & 3 Theor. xxi. Vis altera eſt attractionis *LM*, quæ quoniam tendit a *P* ad *T*, ſuperaddita vi priori coincidet cum ipſa, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per Corol. 3. Theor. xxi. At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ *PT* reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idque eo magis quo major eſt proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Prop. xi, & per Corol. 2. Theor. xxi) vis qua Ellipſis circa umbilicum *T* deſcribitur tendere debeat ad umbilicum illum, & eſſe quadrato diſtantiæ *PT* reciproce proportionalis; vis illa compoſita, aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis *PAB* aberret a forma Ellipſeos umbilicum habentis in *S*; idque eo magis quo major eſt aberratio ab hac proportione; atque adeo etiam quo major eſt proportio vis ſecundæ *LM* ad vim primam, cæteris paribus.



Jam vero vis tertia *SM*, trahendo corpus *P* ſecundum lineam ipſi *ST* parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a *P* in *T*, quæque ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atque adeo quæ faciet ut corpus *P*, radio *TP*, areas non amplius temporibus proportionales deſcribat, atque aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero *PAB* aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de cauſa adaugebit, tum quod non dirigatur a *P* ad *T*, tum etiam quod non ſit proportionalis quadrato diſtantiæ *PT*. Quibus intellectis, manifeſtum eſt quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, ſit minima; & quod Orbis *PAB* tum maxime accedit ad præfatam formam Ellipticam, ubi vis tam ſecunda quam tertia, ſed præcipue vis tertia, ſit minima, vi prima manente.

Expo-

Digitized by Google

Exponatur corporis *T* attractio acceleratrix verſus *S* per lineam *SN*; & ſi attractiones acceleratrices *SM*, *SN* æquales eſſent; hæ, trahendo corpora *T* & *P* æqualiter & ſecundum lineas parallelas, nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per Legum Corol. 6.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio *SN* minor eſſet attractione *SM*, tolleret ipſa attractionis *SM* partem *SN*, & maneret pars ſola *MN*, qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio *SN* major eſſet attractione *SM*, oriretur ex differentia ſola *MN* perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem *SN* reducitur ſemper attractio tertia ſuperior *SM* ad attractionem *MN*, attractione prima & ſecunda manentibus prorſus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita *PAB* ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *MN* vel nulla eſt, vel quam fieri poſſit minima; hoc eſt, ubi corporum *P* & *T* attractiones acceleratrices, factæ verſus corpus *S*, accedunt quantum fieri poteſt ad æqualitatem; id eſt, ubi attractio *SN* non eſt nulla, neque minor minima attractionum omnium *SM*, ſed inter attractionum omnium *SM* maximam & minimam quaſi mediocris, hoc eſt, non multo major neque multo minor attractione *SK*. *Q. E. D.*

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora *P*, *S* circa maximum *T* in planis diverſis; & vis *LM*, agendo ſecundum lineam *PT* in plano Orbitæ *PAB* ſitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus *P* de plano Orbitæ ſuæ deturbabit. At vis altera *NM*, agendo ſecundum lineam quæ ipſi *ST* parallela eſt, (atque adeo, quando corpus *S* verſatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ *PAB*;) præter perturbationem motus in Longitudinem jam ante expoſitam, inducet perturbationem motus in Latitudinem, trahendo corpus *P* de plano ſuæ Orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum *P* & *T* ad invicem ſitu, erit ut vis illa generans *MN*, adeoque minima evadet ubi *MN* eſt minima, hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio *SN* non eſt multo major, neque multo minor attractione *SK*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod, ſi corpora plura minora *P*, *S*, *R*, &c. revolvantur circa maximum *T*, motus corporis intimi *P* minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *T* pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur atque cætera a ſe mutuo.

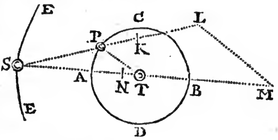
Corol.

Digitized by Google

Corol. 2. In Syſtemate vero trium corporum *T*, *P*, *S*, ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius deſcribet prope Conjunctionem *A* & Oppoſitionem *B*, quam prope Quadraturas *C*, *D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *T* non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam *PT* accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis eſt vis *NM*. Hæc in tranſitu corporis *P* a *C* ad *A* tendit in conſequentia, motumque accelerat; dein uſque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in conſequentia uſque ad *B*, & ultimo in antecedentia tranſeundo a *B* ad *C*.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppoſitione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior eſt in Quadraturis quam in Conjunctione & Oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *KL* vel *NM*, in Conjunctione & Oppoſitione, contraria eſt vi qua corpus *T* trahit corpus *P*, adeoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *T*.



Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *T* in Quadraturis, quam in Conjunctione & Oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu Excentricitatis. Nam ſi Orbita corporis *P* excentrica ſit: Excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. oſtendetur) evadet maxima ubi Apſides ſunt in Syzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus *P*, ad Apſidem ſummam appellans, abſit longius a corpore *T* in Syzygiis quam in Quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, qua corpus *P* retinetur in Orbe ſuo, augetur in Quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in Syzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augetur; eſt autem vis illa centripeta (per Corol. 2, Prop. IV.) in ratione compoſita ex ratione ſimplici radii *TP* directe & ratione duplicata tempo-ris

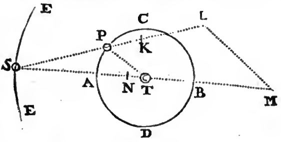
ris periodici inverſe: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis KL, adeoque tempus periodicum, ſi maneat Orbis radius TP, augeri, idque in ſubduplicata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in Radii hujus ratione ſeſquiplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus P minus ſemper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro T; & contra, ſi vis illa augeretur, accederet propius. Ergo ſi actio corporis longinqui S, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices; augebitur ſimul ac diminuetur Radius TP per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſita ex ratione ſeſquiplicata Radii & ratione ſubduplicata qua vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam quod Ellipſeos a corpore P deſcriptæ Axis, ſeu Apſidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen progreditur, & in ſingulis corporis revolutionibus per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis qua corpus P urgetur in corpus T in Quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripeta qua corpus T trahit corpus P. Vis prior LM, ſi augeatur diſtantia PT, augetur in eadem fere ratione cum hac diſtantia, & vis poſterior decreſcit in duplicata illa ratione, adeoque ſumma harum virium decreſcit in minore quam duplicata ratione diſtantiæ PT, & propterea (per Corol. 1. Prop. XLV) efficit ut Aux, ſeu Apſis ſumma, regrediatur. In Conjunctione vero & Oppoſitione, vis qua corpus P urgetur in corpus T differentia eſt inter vim qua corpus T trahit corpus P & vim KL; & differentia illa, propterea quod vis KL augetur quamproxime in ratione diſtantiæ PT, decreſcit in majore quam duplicata ratione diſtantiæ PT, adeoque (per Corol. 1. Prop. XLV) efficit ut Aux progrediatur. In locis inter Syzygias & Quadraturas pendet motus Augis ex cauſa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis KL in Syzygiis ſit quaſi duplo major quam vis LM in Quadraturis, exceſſus in tota revolutione erit penes vim KL, transferetque Augem ſingulis revolutionibus in conſequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Syſtema corporum duorum T, P corporibus pluribus S, S, S, &c. in Orbe ESE conſiſtentibus, undique cingi. Namque horum actioni-

De Motu Corporum bus actio ipſius *T* minuetur undique, decreſcetque in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apſidum progreſſus vel regreſſus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione diſtantiæ *TP*, in tranſitu corporis ab Apſide ima ad Apſidem ſummam; ut & a ſimili incremento in reditu ad Apſidem imam; atque adeo maximus ſit ubi proportio vis in Apſide ſumma ad vim in Apſide ima maxime recedit a duplicata ratione diſtantiarum inverſa: manifeſtum eſt quod Apſides in Syzygiis ſuis, per vim ablatitiam *KL* ſeu *NM*−*LM*, progredientur velocius, inque Quadraturis ſuis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progreſſus vel tarditas regreſſus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipſi, & mox, in deſcenſu ab Apſide ſumma ſeu Auge ad Apſidem imam, vis illa per acceſſum perpetuum vis novæ augeretur in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ diminutæ: manifeſtum eſt quod corpus, perpetuo acceſſu vis illius novæ impulſum ſemper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam ſi urgeretur vi ſola creſcente



in duplicata ratione diſtantiæ diminutæ, adeoque Orbem deſcriberet Orbe Elliptico interiorem, & in Apſide ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, acceſſu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in receſſu corporis ab Apſide ima ad Apſidem ſummam, decreſceret iiſdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad diſtantiam priorem, adeoque ſi vis decreſcat in majori ratione, corpus jam minus attractum aſcendet ad diſtantiam majorem & ſic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper Excentricitas; & e contra, diminuetur eadem ſi ratio illa decreſcat. Jam vero in Syſtemate corporum *T*, *P*, *S*, ubi Apſides Orbis *PAB* ſunt in Quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima eſt, &

Digitized by Google

& maxima ſit ubi Apſides ſunt in Syzygiis. Si Apſides conſtituantur in Quadraturis, ratio prope Apſides minor eſt & prope Syzygias major quam duplicata diſtantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velociſſimus, uti jam dictum eſt. At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter Apſides, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum. Vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in minore quam duplicata ratione diſtantiæ Apſidis ſummæ ab umbilico Ellipſeos ad diſtantiam Apſidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apſides conſtituuntur in Syzygiis, vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in majore quam duplicata ratione diſtantiarum. Nam vires *L M* in Quadraturis additæ viribus corporis *T* componunt vires in ratione minore, & vires *K L* in Syzygiis ſubductæ viribus corporis *T* relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tranſitu inter Apſides, minima in Quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in tranſitu Apſidum a Quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetque Excentricitatem Ellipſeos; inque tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in Latitudinem, fingamus planum Orbis *E S T* immobile manere; & ex errorum expoſita cauſa manifeſtum eſt quod, ex viribus *N M*, *M L*, quæ ſunt cauſa illa tota, vis *M L* agendo ſemper ſecundum planum Orbis *P A B*, nunquam perturbat motus in Latitudinem; quodque vis *N M*, ubi Nodi ſunt in Syzygiis, agendo etiam ſecundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero ſunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpuſque *P* de plano Orbis ſui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in tranſitu corporis a Quadraturis ad Syzygias, augetque viciſſim eandem in tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At ſi Nodi conſtituantur in Octantibus poſt Quadraturas, id eſt, inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligetur ex modo expoſitis quod, in tranſitu corporis *P* a Nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad Quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad Nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor eſt ſemper in Nodo ſubſequente quam in præcedente.

dente. Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur quam diminuitur ubi Nodi ſunt in Octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi Nodi ſunt in Syzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum a Syzygiis ad Quadraturas, in ſingulis corporis ad Nodos appulſibus, diminuitur, fitque omnium minima ubi Nodi ſunt in Quadraturis & corpus in Syzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus quibus antea decreverat, Nodiſque ad Syzygias proximas appulſis ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P* ubi Nodi ſunt in Quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis ſui, idque in partem verſus *S*, in tranſitu ſuo a Nodo *C* per Conjunctionem *A* ad Nodum *D*; & in contrariam partem in tranſitu a Nodo *D* per Oppoſitionem *B* ad Nodum *C*; manifeſtum eſt quod in motu ſuo a Nodo *C*, corpus perpetuo recedit ab Orbis ſui plano primo *CD*, uſque dum perventum eſt ad Nodum proximum; adeoque in hoc Nodo, longiſſime diſtans a plano illo primo *CD*, tranſit per planum Orbis *EST* non in plani illius Nodo altero *D*, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus eſt Nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent Nodi recedere in tranſitu corporis de hoc Nodo in Nodum proximum. Nodi igitur in Quadraturis conſtituti perpetuo recedunt; in Syzygiis (ubi motus in Latitudinem nil perturbatur) quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardius; adeoque, ſemper vel retrogradi vel ſtationarii, ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

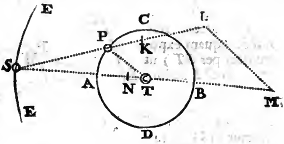
Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis deſcripti Errores ſunt paulo majores in Conjunctione corporum *P*, *S* quam in eorum Oppoſitione, idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

Corol. 13. Cumque rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *S* tanta ſtatuitur magnitudo ut circa ipſum revolvatur corporum duorum *T* & *P* Syſtema. Et ex aucto corpore *S* auctaque adeo ipſius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus diſtantiis) majores in hoc caſu quam in altero, ubi corpus *S* circum Syſtema corporum *P* & *T* revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum eſt, ſint quamproxime ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc eſt, ſi detur tum diſtantia *PT*, tum corporis *S* vis abſoluta, ut *ST cub.* reciproce; ſint autem vires illæ *NM*, *ML* cauſæ errorum & effectuum omnium de quibus actum eſt in præcedentibus

dentibus Corollariis: manifeſtum eſt quod effectus illi omnes, ſtante corporum T & P Syſtemate, & mutatis tantum diſtantia ST & vi abſoluta corporis S, ſint quamproxime in ratione compoſita ex ratione directa vis abſolutæ corporis S & ratione triplicata inverſa diſtantiæ ST. Unde ſi Syſtema corporum T & P revolvatur circa corpus longinquum S, vires illæ NM, ML & earum effectus erunt (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, ſi magnitudo corporis S proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ, erunt vires illæ NM, ML & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis S e corpore T ſpectati, & vice verſa. Namque hæ rationes eædem ſunt atque ratio ſuperior compoſita.

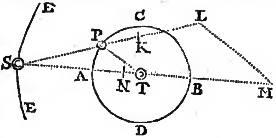
Corol. 15. Et quoniam ſi, manentibus Orbium ESE & PAB forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & ſi corporum S & T vel maneant vel mutentur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc eſt, vis corporis T qua corpus P de recto tramite in Orbitam PAB deflectere, & vis corporis S qua corpus idem P de Orbita illa deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo & eadem proportione: neceſſe eſt ut ſimiles & proportionales ſint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium ſimilium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.



Corol. 16. Unde, ſi dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & diſtantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Caſu, colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires NM, ML, cæteris ſtantibus, ſunt ut Radius TP, & harum effectus periodici (per Corol. 2. Lem. X) ut vires & quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis P; & hinc errores angulares e centro T ſpectati (id eſt, tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in Longitudinem & Latitudinem errores apparentes) ſunt, in qualibet revolutione corporis P, ut quadratum temporis revo-

revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14, & in quolibet corporum *T*, *P*, *S* Syſtemate, ubi *P* circum *T* ſibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum revolvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *T* apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſe. Et inde motus medius Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterque erit ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſe. Augendo vel minuendo Excentricitatem & Inclinationem Orbis *PAB* non mutantur motus Augis & Nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea *LM* nunc major ſit nunc minor quam radius *PT*, exponatur vis mediocris *LM* per radium illum *PT*; & erit hæc ad vim mediocrem *SK* vel *SN* (quam exponere licet per *ST*) ut longitudo *PT* ad longitudinem *ST*. Eſt autem vis mediocris *SN* vel *ST*, qua corpus *T* retinetur in Orbe ſuo circum *S*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe ſuo circum *T*, in ratione compoſita ex ratione radii *ST* ad radium *PT*, & ratione duplicata temporis periodici corporis *P* circum *T* ad tempus periodicum corporis *T* circum *S*. Et ex æquo, vis mediocris *LM*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe ſuo circum *T* (quave corpus idem *P*, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile *T* ad diſtantiam *PT* revolvi poſſet) eſt in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum diſtantia *PT*, datur vis mediocris *LM*; & ea data, datur etiam vis *MN* quamproxime per analogiam linearum *PT*, *MN*.



Corol. 18. Iiſdem legibus quibus corpus *P* circum corpus *T* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *T* ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari Annulum fluidum, rotundum ac corpori *T* concentricum; & ſingulæ Annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis *P* peragendo,

Digitized by Google

agendo, propius accedent ad corpus *T*, & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppoſitione ipſarum & corporis *S*, quam in Quadraturis. Et Nodi Annuli hujus ſeu interſectiones ejus cum plano Orbitæ corporis *S* vel *T*, quieſcent in Syzygiis; extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velociſſime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completaque revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam Globum corporis *T*, ex materia non fluida conſtantem, ampliari & extendi uſque ad hunc Annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuque eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in ſuperiore Corollario) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam ſuperficies Globi, & ſic fluet in alveo refluetque ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio corporis *S* nullum acquiret motum fluxus & refluxus. Par eſt ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum ſuum (per Legum Corol. 5.) ut & Globi de curſu rectilineo uniformiter tracti, per Legum Corol. 6. Accedat autem corpus *S*, & ab ipſius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem LM trahet aquam deorſum in Quadraturis, facietque ipſam deſcendere uſque ad Syzygias; & vis KL trahet eandem ſurſum in Syzygiis, ſiſtetque deſcenſum ejus & faciet ipſam aſcendere uſque ad Quadraturas.

Corol. 20. Si Annulus jam rigeat & minuatur Globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi; ſed Oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum Annulo, gyroſque compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſua contingat ipſum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriuſque Oſcillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli Globo orbati maximus inclinationis angulus eſt ubi Nodi ſunt in Syzygiis. Inde in progreſſu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impreſſum uſque dum Annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac ratione

tione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus poſt Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis, & maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem eſt ratio Globi Annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quam juxta polos, vel conſtat ex materia paulo denſiore. Supplet enim vicem Annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, aucta utcunque Globi hujus vi centripeta, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atque adeo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt, ſi Globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in conſequentia.

Corol. 22. Et inde viciſſim, ex motu Nodorum innoteſcit conſtitutio Globi. Nimirum ſi Globus polos eoſdem conſtanter ſervat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocunque oblique in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, quam in alium quemvis; perſpicuum eſt quod is axem ſuum axiſque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique, in eadem illa ſuperficiei parte qua prius, impulſu quocunque novo; & cum citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt quod hi duo impulſus ſucceſſive impreſſi eundem producent motum ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt, eundem ac ſi Globus vi ſimplici ex utroque (per Legum Corol. 2.) compoſita impulſus fuiſſet, atque adeo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus abſque primo generaret; atque adeo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: Generabunt hi eundem motum circularem

Digitized by Google

cularem ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si Globus plano quocunque, per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, & propterea Globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro ſui motus, turbabit motum Globi, facietque polos ejus errare per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumque ſibi oppoſitum perpetuo deſcribere. Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Caſu (per Corol. 21) Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per Corol. 20) Nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

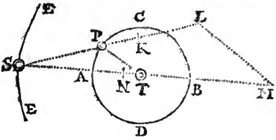
Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.*

Nam corporis *S* attractiones verſus *T* & *P* componunt ipſius attractionem abſolutam, quæ magis dirigitur in corporum *T* & *P* commune gravitatis centrum *C*, quam in corpus maximum *T*, quæque quadrato diſtantiæ *SC* magis eſt proportionalis reciproce, quam quadrato diſtantiæ *ST*: ut rem perpendenti facile conſtabit.

Digitized by Google

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P *&* T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, ſi corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam ſi id vel non attractum quieſcat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.*



Demonſtratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, ſed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem ſic æſtimare. Ex demonſtratione Propoſitionis noviſſimæ liquet centrum in quod corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum eſſe communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quieſceret commune centrum gravitatis corporum trium; deſcriberent corpus *S* ex una parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quieſcens, Ellipſes accuratas. Liquet hoc per Corollarium ſecundum Propoſitionis LVIII collatum cum demonſtratis in Propoſ. LXIV & LXV. Perturbatur iſte motus Ellipticus aliquantulum per diſtantiam centri duorum a centro in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima eſt perturbatio ubi commune trium centrum quieſcit, hoc eſt, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major ſemper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *T*, moveri incipit & magis deinceps magiſque agitatur.

Corol.

Corol. Et hinc, ſi corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ deſcriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum deſcriptiones fient magis æquabiles, ſi corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt ut eorum vires abſolutæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe, ſe mutuo trahant agitentque, & Orbitæ cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ ſecundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iſte tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & ſic deinceps) quam ſi corpus intimum quieſcat & ſtatuatur communis umbilicus Orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In Syſtemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. ſi corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente: erunt Abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* verſus *A*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex Hypotheſi; & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis *A* ad vim abſolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis; & ita eſt attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A* eſt ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, ſunt (per motus Legem tertiam) ſibi invicem æquales.

Digitized by Google

les. Ergo abſoluta vis attractiva corporis A eſt ad abſolutam vim attractivam corporis B, ut maſſa corporis A ad maſſam corporis B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ſingula Syſtematis corpora A, B, C, D, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires abſolutæ ad invicem ut ſunt ipſa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, ſi ſingula Syſtematis corpora A, B, C, D, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ ſunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuſcunque diſtantiarum a trahente, quæve ſecundum Legem quamcunque communem ex diſtantiis ab unoquoque trahente definiuntur; conſtat quod corporum illorum vires abſolutæ ſunt ut corpora.

Corol. 3. In Syſtemate corporum, quorum vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum, ſi minora circa maximum in Ellipſibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri poteſt accuratiſſimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis deſcribant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires abſolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His Propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones, aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem Attractionis hic generaliter uſurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem; ſive conatus iſte fiat ab actione corporum, vel ſe mutuo petentium, vel per Spiritus emiſſos ſe invicem agitantium, ſive is ab actione Ætheris, aut Aeris, Mediive cujuſcunque ſeu corporei ſeu incorporei oriatur corpora innatantia in ſe invicem utcunque impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem Impulſus, non ſpecies virium

&

Digitized by Google

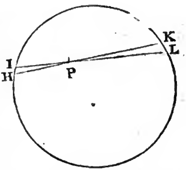
& qualitates Phyſicas, ſed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens, ut in Definitionibus explicui. In Matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuſcunque poſitis conſequentur: deinde, ubi in Phyſicam deſcenditur, conferendæ ſunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus Phyſicis tutius diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuo agere, & quales motus inde conſequantur.

SECTIO XII.

De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad Sphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.



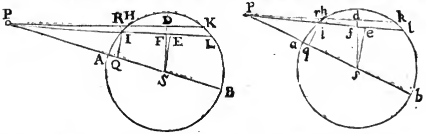
Sit *HIKL* ſuperficies illa Sphærica, & *P* corpuſculum intus conſtitutum. Per *P* agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; &, ob triangula *HPI*, *LPK* (per Corol. 3. Lem. VII) ſimilia, arcus illi erunt diſtantiis *HP*, *LP* proportionales; & ſuperficiei Sphæricæ particulæ quævis ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* tranſeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe. Et hæ duæ rationes componunt rationem æquali-

æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, ſe mutuo deſtruunt. Et ſimili argumento, attractiones omnes per totam Sphæricam ſuperficiem a contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum Sphæræ, vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

Sint $AHKB$, $ahkb$ æquales duæ ſuperficies Sphæricæ, centris S, s, diametris AB, ab deſcriptæ, & P, p corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur a corpuſculis lineæ



PHK, PIL, phk, pil, auferentes a circulis maximis AHB, ahb, æquales arcus HK, hk & IL, il: Et ad eas demittantur perpendicula SD, sd; SE, se; IR, ir; quorum SD, sd ſecent PL, pl in F & f: Demittantur etiam ad diametros perpendicula IQ, iq. Evaneſcant anguli DPE, dpe: & (ob æquales DS & ds, ES & es,) lineæ PE, PF & pe, pf & lineolæ DF, df pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE, dpe ſimul evaneſcentibus, eſt æqualitatis. His itaque conſtitutis, erit PI ad PF ut RI ad DF, & pf ad pi ut df vel DF ad ri; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI ad ri, hoc eſt (per Corol. 3. Lem. VII,) ut arcus IH ad arcum ih. Rurſus PI ad PS ut IQ ad SE, & ps ad pi ut se vel SE ad iq; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq. Et conjunctis rationibus PI *quad.* $\times pf \times ps$ ad pi *quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus

arcus

Digitized by Google

arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus ih convolutione ſemicirculi akb circa diametrum ab deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula P & p, ſunt (per Hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies applicatæ ad quadrata diſtantiarum ſuarum a corporibus, hoc eſt, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipſarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2. reſolutione virium) ſecundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ, & pi ad pq; id eſt (ob ſimilia triangula PIQ & PSF, piq & psf) ut PS ad PF & ps ad pf. Unde, ex æquo, fit attractio corpuſculi hujus P verſus S ad attractionem corpuſculi p verſus s, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt, ut ps *quad.* ad PS *quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum KL, kl deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut ps *quad.* ad PS *quad.*; inque eadem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraque ſuperficies Sphærica, capiendo ſemper sd æqualem SD & se æqualem SE, diſtingui poteſt. Et, per compoſitionem, vires totarum ſuperficierum Sphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad Sphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis, ac detur tum Sphæræ denſitas, tum ratio diametri Sphæræ ad diſtantiam corpuſculi a centro ejus; dico quod vis qua corpuſculum attrahitur proportionalis erit ſemidiametro Sphæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim a Sphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & diſtantias eorum a Sphærarum centris proportionales eſſe diametris Sphærarum reſpective, Sphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione compoſita ex ratione particularum directe & ratione duplicata diſtantiarum inverſe.

Digitized by Google

verſe. Sed particulæ ſunt ut Sphæræ, hoc eſt, in ratione triplicata diametrorum, & diſtantiæ ſunt ut diametri, & ratio prior directe una cum ratione poſteriore bis inverſe eſt ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

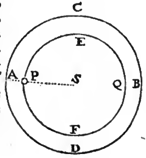
Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in Circulis, circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice verſa, ſi Tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

Corol. 3. Si ad Solidorum duorum quorumvis ſimilium & æqualiter denſorum puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: vires quibus corpuſcula, ad Solida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri Solidorum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad Sphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra Sphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.



In Sphæra *ABCD*, centro *S* deſcripta, locetur corpuſculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe Sphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, per Prop. LXX, quod Sphæricæ ſuperficies concentricæ ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Prop. LXXII, hæc eſt ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*

Scholium.

Superficies ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt pure Mathematicæ, ſed Orbes adeo tenues ut eorum craſſitudo inſtar nihili

nihili ſit; nimirum Orbes evaneſcentes ex quibus Sphæra ultimo conſtat, ubi Orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per Puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies & ſolida componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæram conſtitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtinguatur Sphæra in ſuperficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpuſculi a ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi a centro, per Prop. LXXI. Et componendo, fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in Sphæram totam, in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones ſunt ut Sphæræ. Nam per Prop. LXXII, ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illa ratione; &, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc eſt, in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum, extra Sphæram homogeneam poſitum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem Sphæra ex particulis attractivis; decreſcet vis particulæ cujuſque in duplicata ratione diſtantiæ a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad Sphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis; dico quod Sphæra quævis alia ſimilaris ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ſuæ a centro Sphæræ trahentis, (per Prop. LXXIV) & propterea

terea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud a ſingulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (per Prop. LXXIV) reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ a centro Sphæræ; adeoque huic æqualis attractio Sphæræ eſt in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, verſus alias Sphæras homogeneas, ſunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius, eadem vi qua ab ipſis viciſſim trahuntur, adeoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem III) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

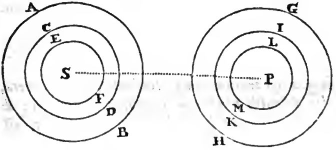
Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si Sphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſunt undique ſimilares, & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicata ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi Sphæra una attrahit aliam ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Sunto Sphæræ quotcunque concentricæ ſimilares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem

denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per Prop. LXXV) trahent Sphæras alias quotcunque concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias, hoc eſt, vis quas Sphæra tota ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum Legem quamcunque creſcat vel decreſcat: &, ad-



dita materia non attractiva, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum ſuperius) in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi Sphæræ complures, ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, ſeu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Digitized by Google

De Motu Corporum *Corol.* 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriuſque virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervata.

Corol. 6. Si hujuſmodi Sphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas, ſintque diſtantiæ inter centra revolventium & quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt Tempora periodica.

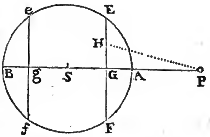
Corol. 7. Et viciſſim, ſi Tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujuſvis jam deſcriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia ſunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad ſingula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ, proportionales diſtantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis compoſita, qua Sphæræ duæ ſe mutuo trahent, eſt ut diſtantia inter centra Sphærarum.



Cas. 1. Sit $AEBF$ Sphæra, S centrum ejus, P corpuſculum attractum, $PASB$ axis Sphæræ per centrum corpuſculi tranſiens, EF, ef plana duo quibus Sphæra ſecatur, huic axi perpendicularia & hinc inde æqualiter diſtantia a centro Sphæræ; G, g interſectiones planorum & axis, & H punctum quodvis in plano EF. Puncti H vis centripeta in corpuſculum P, ſecundum lineam PH exercita, eſt ut diſtantia PH; & (per Legum Corol. 2.) ſecundum lineam PG, ſeu verſus centrum S, ut longitudo PG. Igitur punctorum omnium in plano EF, hoc eſt plani totius vis, qua corpuſculum P trahitur verſus centrum S, eſt ut numerus punctorum ductus in diſtantiam PG: id eſt, ut contentum ſub plano ipſo EF & diſtantia illa PG. Et ſimiliter vis plani ef, qua corpuſculum P trahitur

trahitur verſus centrum S, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam Pg, ſive ut huic æquale planum EF ductum in diſtantiam illam Pg; & ſumma virium plani utriuſque ut planum EF ductum in ſummam diſtantiarum $PG+Pg$, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri & corpuſculi diſtantiam PS, hoc eſt, ut duplum planum EF ductum in diſtantiam PS, vel ut ſumma æqualium planorum $EF+ef$ ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam PS, hoc eſt, ut Sphæra tota ducta in diſtantiam centri ſui S a corpuſculo P. *Q. E. D.*

Cas. 2. Trahat jam corpuſculum P Sphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut diſtantia PS. *Q. E. D.*

Cas. 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpuſculis innumeris P; & quoniam vis, qua corpuſculum unumquodque trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atque adeo eadem eſt ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuſcula omnia in Sphæra ſecunda trahuntur, hoc eſt, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac ſi Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſculo unico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra Sphærarum. *Q. E. D.*

Cas. 4. Trahant Sphæræ ſe mutuo, & vis geminata proportionem priorem ſervabit. *Q. E. D.*

Cas. 5. Locetur jam corpuſculum p intra Sphæram $AEBF$; & quoniam vis plani ef in corpuſculum eſt ut contentum ſub plano illo & diſtantia pg; & vis contraria plani EF ut contentum ſub plano illo & diſtantia pG; erit vis ex utraque compoſita ut differentia contentorum, hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt, ut ſumma illa ducta in pS diſtantiam corpuſculi a centro Sphæræ. Et ſimili argumento, attractio planorum omnium EF, ef in Sphæra tota, hoc eſt, attractio Sphæræ totius, eſt ut ſumma planorum omnium, ſeu Sphæra tota, ducta in pS diſtantiam corpuſculi a centro Sphæræ. *Q. E. D.*

Cas. 6. Et ſi ex corpuſculis innumeris p componatur Sphæra nova, intra Sphæram priorem $AEBF$ ſita; probabitur ut prius quod attractio, ſive ſimplex Sphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſque in ſe invicem, erit ut diſtantia centrorum pS. *Q. E. D.*

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si Sphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi Sphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra Sphærarum.

Demonſtratur ex Propoſitione præcedente, eodem modo quo Propoſitio LXXVI ex Propoſitione LXXV demonſtrata fuit.

Corol. Quæ ſuperius in Propoſitionibus X & LXIV de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum conditionis jam deſcriptæ, ſuntque corpora attracta Sphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

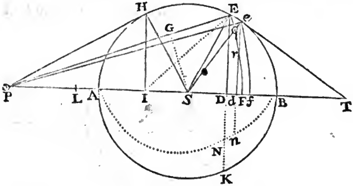
Attractionum Caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi Vires centripetæ decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque Caſu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum Vires centripetas eadem Lege, in receſſu a centro, decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis: Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare, ut ſequitur.

LEMMA XXIX.

Si deſcribantur centro S *circulus quilibet* AEB, *& centro* P *circuli duo* EF, ef, *ſecantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; *& ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, ſi diſtantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis* Dd *ad lineam evaneſcentem* Ff *ea ſit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam

Nam ſi linea Pe ſecet arcum EF in q; & recta Ee, quæ cum arcu evaneſcente Ee coincidit, producta occurrat rectæ PS in T; & ab S demittatur in PE normalis SG: ob ſimilia triangula DTE, dTe, DES; erit Dd ad Ee, ut DT ad TE, ſeu DE ad



ES; & ob triangula Eeq, ESG (per Lem. VIII, & Corol. 3. Lem. VII) ſimilia, erit Ee ad eq ſeu Ff, ut ES ad SG; & ex æquo, Dd ad Ff ut DE ad SG; hoc eſt (ob ſimilia triangula PDE, PGS) ut PE ad PS. *Q. E. D.*

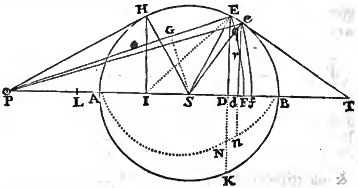
PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si ſuperficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evaneſcens EFfe, *convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod Vis, qua ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione composita ex ratione ſolidi* $DEq \times Ff$ *& ratione vis qua particula data in loco* Ff *traheret idem corpuſculum.*

Nam ſi primo conſideremus vim ſuperficiei Sphæricæ FE, quæ convolutione arcus FE generatur, & a linea de ubivis ſecatur in r; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcus rE genita, ut lineola Dd, manente Sphæræ radio PE, (uti demonſtravit *Archimedes* in Lib. de *Sphæra* & *Cylindro*.) Et hujus vis ſecundum lineas PE vel Pr undique in ſuperficie conica ſitas exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola Dd vel, quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato Sphæræ radio PE & lineola

Digitized by Google

lineola illa Dd: at ſecundum lineam PS ad centrum S tendentem minor, in ratione PD ad PE, adeoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur Dd; & ſuperficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium $PD \times Dd$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}\ PFq - \frac{1}{2}\ PDq$, adeoque ut DE *quad.* Ducatur



jam ſuperficies FE in altitudinem Ff; & fiet ſolidi $EFfe$ vis exercita in corpuſculum P ut $DEq \times Ff$: puta ſi detur vis quam particula aliqua data Ff in diſtantia PF exercet in corpuſculum P. At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi $EFfe$ ut ſolidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad Sphæræ alicujus ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE, *Sphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis quam Sphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam* PE *exercet in corpuſculum* P *conjunctim: dico quod Vis tota, qua corpuſculum* P *trahitur verſus Sphæram, eſt ut area comprehenſa ſub axe Sphæræ* AB *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim

Digitized by Google

Etenim ſtantibus quæ in Lemmate & Theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem Sphæræ *AB* dividi in particulas innumeras æquales Dd, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas $EFfe$; & erigatur perpendiculum dn. Per Theorema ſuperius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpuſculum *P* eſt ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad diſtantiam *PE* vel *PF* exercita conjunctim. Eſt autem per Lemma noviſſimum, Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ eſt ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam *PF* exercita conjunctim, hoc eſt (ex Hypotheſi) ut $DN \times Dd$, ſeu area evaneſcens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires in corpus *P* exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc eſt, Sphæræ vis tota ut area tota *ABNA*. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta, ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$: erit vis tota qua corpuſculum a Sphæra attrahitur, ut area *ABNA*.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$: erit vis qua corpuſculum *P* a Sphæra tota attrahitur ut area *ABNA*.

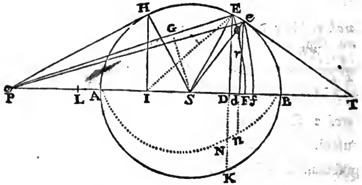
Corol. 3. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut cubus diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$: erit vis qua corpuſculum a tota Sphæra attrahitur ut area *ABNA*.

Corol. 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciproce ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis qua corpuſculum a Sphæra tota attrahitur ut area *ABNA*.

PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA XLI.

Stantibus jam poſitis, menſuranda eſt Area ABNA.

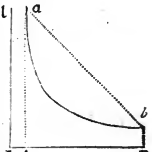
A puncto *P* ducatur recta *PH* Sphæram tangens in *H*, & ad axem *PAB* demiſſa normali *HI*, biſecetur *PI* in *L*; & erit (per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) *PEq* æquale *PSq* + *SEq* + 2*PSD*. Eſt autem *SEq* ſeu *SHq* (ob ſimilitudinem triangulorum *SPH*, *SHI*) æquale rectangulo *PSI*. Ergo *PEq* æquale eſt contento ſub *PS* & *PS*+*SI*+2*SD*, hoc eſt, ſub *PS* & 2*LS*+2*SD*, id eſt, ſub *PS* & 2*LD*. Porro *DE quad* æquale eſt *SEq*−*SDq*, ſeu *SEq*−*LSq*+2*SLD*−*LDq*, id eſt, 2*SLD*−*LDq*−*ALB*. Nam *LSq*−*SEq* ſeu *LSq*−*SAq*



(per Prop. 6, Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo *ALB*. Scribatur itaque 2*SLD*−*LDq*−*ALB* pro *DEq*; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ ſecundum Corollarium quartum Propoſitionis præcedentis eſt ut longitudo ordinatim applicatæ *DN*, reſolvet ſeſe in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi ſi pro V ſcribatur ratio inverſa vis centripetæ, & pro *PE* medium proportionale inter *PS* & 2*LD*; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innoteſcunt. *Q. E. F.*

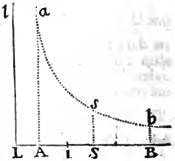
Ex-

Exempl. 1. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam PE, dein $2PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem duplo ejus $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB deſcribet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini LD, deſcribet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, deſcribet aream Hyperbolicam; quæ ſubducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæſitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipſi LB, & Bb ipſi LA æquetur. Aſymptotis Ll, LB, per puncta a, b deſcribatur Hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæſitæ $ABNA$ æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut cubus diſtantiæ, vel (quod perinde eſt) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; ſcribe $\frac{PE\,cub}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id eſt (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperbolicam;

bolicam; ſecunda $\frac{1}{2} SI$ aream $\frac{1}{2} AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2 LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2 LA} - \frac{ALB \times SI}{2 LB}$, id eſt $\frac{1}{2} AB \times SI$. De prima ſubducatur ſumma ſecundæ & tertiæ, & manebit area quæſita $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipſi SI æquetur, perque punctum s Aſymptotis Ll, LB deſcribatur Hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ ſubductum de area Hyperbolica $AasbB$ reliquet aream quæſitam $ABNA$.



Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad ſingulas Sphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicata ratione diſtantiæ a particulis; ſcribe $\frac{PEqq}{2 AS cub}$ pro V, dein $\sqrt{2 PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2 SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}}, - \frac{SIq}{2\sqrt{2 SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}}, - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2 SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2 SIq \times SL}{\sqrt{2 SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2 SI}}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2 SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA cub}} - \frac{1}{\sqrt{LB cub}}$. Et hæ poſt debitam reductionem fiunt $\frac{2 SIq \times SL}{LI}$, SIq, & $SIq + \frac{2 SI cub}{3 LI}$. Hæ vero, ſubductis poſterioribus de priore, evadunt $\frac{4 SI cub}{3 LI}$. Igitur vis tota, qua corpuſculum P in Sphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SI cub}{PI}$, id eſt, reciproce ut $PS cub \times PI$. *Q. E. I.*

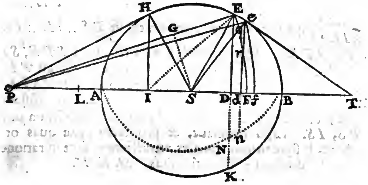
Eadem Methodo determinari poteſt Attractio corpuſculi ſiti intra Sphæram, ſed expeditius per Theorema ſequens.

PRO-

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In Sphæra centro S *intervallo* S A *deſcripta, ſi capiantur* S I, S A, S P *continue proportionales: dico quod corpuſculi intra Sphæram in loco quovis* I *attractio eſt ad attractionem ipſius extra Sphæram in loco* P, *in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione diſtantiarum a centro* I S, P S *& ſubduplicata ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut ſi vires centripetæ particularum Sphæræ ſint reciproce ut diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti; vis, qua corpuſculum ſitum in *I* trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in *P*, in ratione



compoſita ex ſubduplicata ratione diſtantiæ *SI* ad diſtantiam *SP* & ratione ſubduplicata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id eſt, ratione ſubduplicata diſtantiarum *SI*, *SP* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes ſubduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, ſi vires particularum Sphæræ ſunt reciproce in duplicata ratione diſtantiarum, colligetur quod attractio in *I* ſit ad attractionem in *P*, ut diſtantia *SP* ad Sphæræ ſemidiametrum *SA*: Si vires illæ ſunt reciproce in triplicata ratione diſtantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad invicem

cem ut SP *quad* ad SA *quad:* Si in quadruplicata, ut SP *cub* ad SA *cub.* Unde cum attractio in P, in hoc ultimo caſu, inventa fuit reciproce ut $PS\,cub \times PI$, attractio in I erit reciproce ut $SA\,cub \times PI$, id eſt (ob datum SA *cub*) reciproce ut PI. Et ſimilis eſt progreſſus in infinitum. Theorema vero ſic demonſtratur.

Stantibus jam ante conſtructis, & exiſtente corpore in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo ſi agatur IE, ordinata illa ad alium quemvis locum I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis E manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n, (ubi numerus n deſignet indicem poteſtatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem eſt ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob ſimilia triangula SPE, SEI, fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE ſcribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n ſubduplicata eſt ratio virium in diſtantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ deſcribunt, hiſque proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

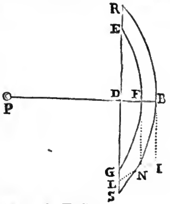
PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim qua corpuſculum in centro Sphæræ locatum ad ejus Segmentum quodcunque attrahitur.

Sit P corpus in centro Sphæræ, & $RBSD$ Segmentum ejus plano RDS & ſuperficie Sphærica RBS contentum. Superficie Sphærica EFG centro P deſcripta ſecetur DB in F, ac diſtinguatur Segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem ſuperficies illa non pure Mathematica, ſed Phyſica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur iſta profunditas O,

Digitized by Google

tas O, & erit hæc ſuperficies (per demonſtrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ eſſe reciproce ut diſtantiarum dignitas illa cujus Index eſt n; & vis qua ſuperficies FE trahit corpus P erit ut $\frac{DF \times O}{PF^{n-1}}$. Huic proportionale ſit perpendiculum FN ductum in O; & area curvilinea $BDLIB$, quam ordinatim applicata FN in longitudinem DB per motum continuum ducta deſcribit, erit ut vis tota qua Segmentum totum $RBSD$ trahit corpus P. *Q. E. I.*



PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim qua corpuſculum, extra centrum Sphæræ in axe Segmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem Segmento.

A Segmento EBK trahatur corpus P (Vide Fig. Prop. LXXIX, LXXX, LXXXI) in ejus axe ADB locatum. Centro P intervallo PE deſcribatur ſuperficies Sphærica EFK, qua diſtinguatur Segmentum in partes duas $EBKF$ & $EFKD$. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI, & vis partis poſterioris per Prop. LXXXIII; & ſumma virium erit vis Segmenti totius $EBKD$. *Q. E. I.*

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad Leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Suffecerit Propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus Philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SECTIO

Digitized by Google

SECTIO XIII.

De Corporum non Sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum eſt, attractio longe fortior ſit, quam cum vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicata diſtantiarum a particulis.

Nam ſi vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum a particulis; attractio verſus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV) ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ attracti corporis a centro Sphæræ, haud ſenſibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, ſi attractio in receſſu corporis attracti decreſcat in ratione minore. Patet igitur Propoſitio de Sphæris attractivis. Et par eſt ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res conſtat in Orbibus corpora interius conſtituta trahentibus, cum attractiones paſſim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX) tollantur, ideoque vel in ipſo contactu nullæ ſunt. Quod ſi Sphæris hiſce Orbibuſque Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari poſſunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel ſubductæ, cum ſint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis exceſſum qui ex contactu oritur. Conſtat igitur Propoſitio de corporibus Figurarum omnium. *Q. E. D.*

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicata vel pluſquam triplicata ratione diſtantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.

Nam attractionem in acceſſu attracti corpuſculi ad hujuſmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem Problematis XLI, in Exemplo ſecundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI inter ſe collata, facile colligitur de attractionibus corporum verſus Orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra Orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit Propoſitio de corporibus univerſis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materia æqualiter attractiva conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis ſimiliter poſitas.

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum ſecundum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo ſi vires attractivæ particularum, augendo diſtantias corpuſculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis

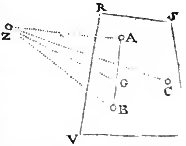
Digitized by Google

cujuſvis diſtantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & diſtantiarum dignitates illæ inverſe. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis, corpora autem ſint ut *A cub.* & *B cub.* adeoque tum corporum latera cubica, tum corpuſculorum attractorum diſtantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,quad.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,quad.}$ id eſt, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,cub.}$ id eſt, æquales. Si vires decreſcant in ratione quadruplicata; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{Aqq.}$ & $\frac{B\,cub.}{Bqq.}$ id eſt, reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et ſic in cæteris.

Corol. 2. Unde viciſſim, ex viribus quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modo decrementum illud ſit directe vel inverſe in ratione aliqua diſtantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium Corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi Globi ex materia conſimili & æquali conſtantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.



Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpuſculum aliquod *Z* viribus quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ *AZ*, *BZ*; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ in diſtantias ſuas *AZ*, *BZ* reſpective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur *AB*, & ſecetur ea in *G* ut ſit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particul

Digitized by Google

& erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (per Legum Corol. 2.) reſolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$ & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; adeoque cum dirigantur in partes contrarias, ſe mutuo deſtruunt. Reſtant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z verſus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ A & B conſiſterent in eorum communi gravitatis centro G, Globum ibi componentes.

Eodem argumento, ſi adjungatur particula tertia C, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis Globi illius G & particulæ C; hoc eſt, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit ac ſi Globus & particula C conſiſterent in centro illo communi, Globum majorem ibi componentes. Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuſcunque $RSTV$ ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, figuram Globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit ac ſi corpus attrahens $RSTV$ eſſet Sphæricum: & propterea ſi corpus illud attrahens vel quieſcat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipſi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si Corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum a ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, qua corpuſculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in Globum formarentur.

Demonſtratur eodem modo, atque Propoſitio ſuperior.

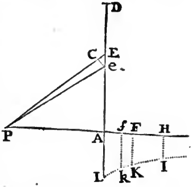
Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac ſi corpora trahentia, ſervato communi gravitatis centro, coirent & in Globum formarentur. Ideoque ſi corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in linea recta: corpus attractum movebitur in Ellipſi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

Digitized by Google

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad ſingula Circuli cujuſcunque puncta tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in quacunque diſtantiarum ratione: invenire vim qua corpuſculum attrahitur ubivis poſitum in recta quæ plano Circuli ad centrum ejus perpendiculariter inſiſtit.

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano cui recta *AP* perpendicularis eſt, deſcribi intelligatur Circulus; & invenienda ſit vis qua corpuſculum quodvis *P* in eundem attrahitur. A Circuli puncto quovis *E* ad corpuſculum attractum *P* agatur recta *PE*: In recta *PA* capiatur *PF* ipſi *PE* æqualis, & erigatur normalis *FK*, quæ ſit ut vis qua punctum *E* trahit corpuſculum *P*. Sitque *IKL* curva linea quam punctum *K* perpetuo tangit. Occurrat eadem Circuli plano in *L*. In *PA* capiatur *PH* æqualis *PD*, & erigatur perpendiculum *HI* curvæ prædictæ occurrens in *I*; & erit corpuſculi *P* attractio in Circulum ut area *AHIL* ducta in altitudinem *AP*. *Q. E. I.*



Etenim in *AE* capiatur linea quam minima *Ee*. Jungatur *Pe*, & in *PE*, *PA* capiantur *PC*, *Pf* ipſi *Pe* æquales. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis *E* trahit ad ſe corpus *P*, ponitur eſſe ut *FK*, & inde vis qua punctum illud trahit corpus *P* verſus *A* eſt ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus *P* verſus *A*, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iſte eſt ut rectangulum ſub radio *AE* & latitudine *Ee*, & hoc rectangulum (ob proportionales *PE* & *AE*, *Ee* & *CE*) æquatur rectangulo $PE \times CE$ ſeu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iſte trahit corpus *P* verſus *A*, ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id eſt, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, ſive ut area *FKkf* ducta in *AP*. Et propterea ſumma virium, quibus annuli omnes in Circulo, qui centro *A* & in-

tervallo AD deſcribitur, trahunt corpus P verſus A, eſt ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. *Q. E. D.*

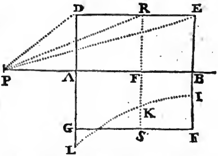
Corol. 1. Hinc ſi vires punctorum decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{PF\,quad.}$, atque adeo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpuſculi P in Circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id eſt, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et univerſaliter, ſi vires punctorum ad diſtantias D ſint reciproce ut diſtantiarum dignitas quælibet D^n, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{D^n}$, adeoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpuſculi P in Circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol 3. Et ſi diameter Circuli augeatur in infinitum, & numerus n ſit unitate major; attractio corpuſculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2}, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evaneſcet.

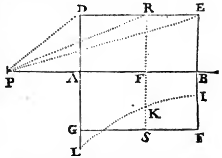
PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpuſculi ſiti in axe Solidi rotundi, ad cujus puncta ſingula tendunt vires æquales centripetæ in quacunque diſtantiarum ratione decreſcentes.

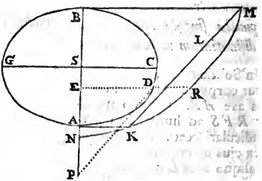


In Solidum $ADEFG$ trahatur corpuſculum P, ſitum in ejus axe AB. Circulo quolibet RFS ad hunc axem perpendiculari ſecetur hoc Solidum, & in ejus diametro FS, in plano aliquo $PALKB$ per axem tranſeunte, capiatur (per Prop. xc) longitudo FK vi qua corpuſculum P in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in L & I; & erit attractio corpuſculi P in Solidum ut area $LABI$. *Q.E.I.*

Corol.



Corol. 1. Unde ſi Solidum Cylindrus ſit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revoluto deſcriptus, & vires centripetæ in ſingula ejus puncta tendentes ſint reciproce ut quadrata diſtantiarum a punctis: erit attractio corpuſculi P in hunc Cylindrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata FK (per Corol. 1. Prop. xc) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, deſcribit aream $1 \times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB, deſcribit aream 1 in $\overline{PE - AD}$ (id quod ex curvæ LIK quadratura facile oſtendi poteſt:) & ſimiliter pars eadem ducta in longitudinem PA deſcribit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipſarum PB, PA differentiam AB deſcribit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum poſtremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & reſtabit area $LABI$ æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, eſt ut $AB - PE + PD$.



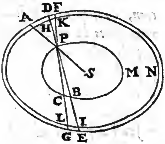
Corol. 2. Hinc etiam vis innoteſcit qua Sphærois $AGBCD$ attrahit corpus quodvis P, exterius in axe ſuo AB ſitum. Sit $NKRM$ Sectio Conica cujus ordinatim applicata ER, ipſi PE perpendicularis, æquetur ſemper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata iſta Sphæroidem ſecat. A Sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendicula AK, BM ipſis AP, BP æqualia reſpective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eadem ſegmentum $KMRK$. Sit autem Sphæroidis centrum S & ſemidiameter maxima SC: & vis

qua

Digitized by Google

qua Sphærois trahit corpus P erit ad vim qua Sphæra, diametro AB deſcripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS\ cub}{3\ PS\ quad}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires ſegmentorum Sphæroidis.

Corol. 3. Quod ſi corpuſculum intra Sphæroidem, in data quavis ejuſdem diametro, collocetur; attractio erit ut ipſius diſtantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit $AGOF$ Sphærois attrahens, S centrum ejus & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum ſemidiameter SPA, tum rectæ duæ quævis DE, FG Sphæroidi hinc inde occurrentes in D & E, F & G: Sintque PCM, HLN ſuperficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori ſimilium & concentricarum, quarum prior tranſeat per corpus P & ſecet rectas DE & FG in B & C, poſterior ſecet eaſdem rectas in H, I & K, L. Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ DP & BE, FP & CG, DH & IE, FK & LG ſibi mutuo æquales; propterea quod rectæ DE, PB & HI biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC & KL. Concipe jam DPF, EPG deſignare Conos oppoſitos, angulis verticalibus DPF, EPG infinite parvis deſcriptos, & lineas etiam DH, EI infinite parvas eſſe; & Conorum particulæ Sphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ $DHKF$, $GLIE$, ob æqualitatem linearum DH, EI, erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum a corpuſculo P, & propterea corpuſculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, ſi ſuperficiebus Sphæroidum innumerarum ſimilium concentricarum & axem communem habentium dividantur ſpatia DPF, $EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur ſunt vires Coni DPF & ſegmenti Conici $EGCB$, & per contrarietatem ſe mutuo deſtruunt. Et par eſt ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus P a ſola Sphæroide intima $PCBM$, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII) attractio ejus eſt ad vim, qua corpus A trahitur a Sphæroide tota $AGOD$, ut diſtantia PS ad diſtantiam AS. Q. E. D.



PRO-

Digitized by Google

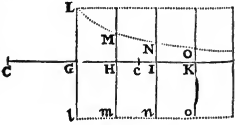
PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato Corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.

E Corpore dato formanda eſt Sphæra vel Cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX, LXXXI, & XCI) inveniri poteſt. Dein factis experimentis invenienda eſt vis attractionis in diverſis diſtantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium ſingularum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si Solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, conſtet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in receſſu a Solido decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis diſtantiarum pluſquam quadraticæ, & vi Solidi totius corpuſculum ad utramvis plani partem conſtitutum trahatur: dico quod Solidi vis illa attractiva, in receſſu ab ejus ſuperficie plana, decreſcet in ratione poteſtatis, cujus latus eſt diſtantia corpuſculi a plano, & Index ternario minor quam Index poteſtatis diſtantiarum.



Cas. 1. Sit LGl planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus verſus I, inque plana innumera mHM, nIN, &c. ipſi GL parallela reſolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra Solidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decreſcant vires attractivæ punctorum Solidi in ratione poteſtatis diſtantiarum, cujus index ſit numerus n ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC)

vis

vis qua planum quodvis *mHM* trahit punctum *C* eſt reciproce ut CH^{n-2}. In plano *mHM* capiatur longitudo *HM* ipſi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut *HM*. Similiter in planis ſingulis *lGL*, *nIN*, *oKO*, &c. capiantur longitudines *GL*, *IN*, *KO*, &c. ipſis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoque ſumma virium ut ſumma longitudinum, hoc eſt, vis Solidi totius ut area *GLOK* in infinitum verſus *OK* producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) eſt reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis Solidi totius eſt reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Cas. 2. Collocetur jam corpuſculum *C* ex parte plani *lGL* intra Solidum, & capiatur diſtantia *CK* æqualis diſtantiæ *CG*. Et Solidi pars *LGloKO*, planis parallelis *lGL*, *oKO* terminata, corpuſculum *C* in medio ſitum nullam in partem trahet, contrariis oppoſitorum punctorum actionibus ſe mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpuſculum *C* ſola vi Solidi ultra planum *OK* ſiti trahitur. Hæc autem vis (per Caſum primum) eſt reciproce ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales *CG*, *CK*) reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi Solidum *LGIN* planis duobus infinitis parallelis *LG*, *IN* utrinque terminetur; innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractiva Solidi totius infiniti *LGKO* vim attractivam partis ulterioris *NICO*, in infinitum verſus *KO* productæ.

Corol. 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo diſtantiam decreſcet quam proxime in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpuſculum e regione medii illius plani, & diſtantia inter corpuſculum & planum collata cum dimenſionibus corporis attrahentis perexigua ſit, conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproxime in ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet; propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario ſecundo, ſemper eſt infinite major quam attractio partis citerioris.

Digitized by Google

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. XXXIX) motum corporis recta deſcendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur Lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunque curva linea moveatur, ſolvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in Series convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel a baſi fugatum, moveri poſſit in curva linea quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: Suppono baſem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ reſolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} O O A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum eſt dimenſionum, id eſt, termino $\frac{mm-mn}{2nn} O O A^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem eſſe ſuppono. Eſt igitur vis quæſita ut $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde eſt, ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut ſi ordinatim applicata Parabolam attingat, exiſtente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^{\circ}$, adeoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonſtravit. Quod ſi ordinatim applicata Hyperbolam attingat, exiſtente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ ſeu $2B^{3}$: adeoque vi, quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed miſſis hujuſmodi Propoſitionibus, pergo ad alias quaſdam de Motu, quas nondum attigi.

SECTIO

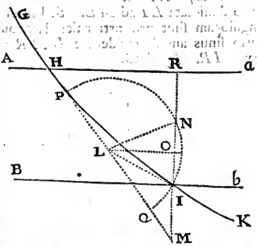
Digitized by Google

SECTIO XIV.

De Motu corporum minimorum, quæ Viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

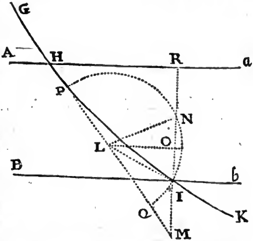
Si Media duo ſimilaria, ſpatio planis parallelis utrinque terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus Medium alterutrum, neque ulla alia vi agitetur vel impediatur: Sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubique eadem: dico quod ſinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.

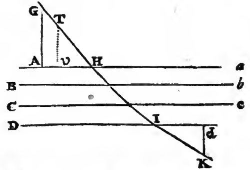


Cas. 1. Sunto *A a*, *B b* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *A a* ſecundum lineam *G H*, ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus Medium incidentiæ, eaque actione deſcribat lineam curvam *H I*, & emergat ſecundum lineam *I K*. Ad planum emergentiæ *B b* erigatur perpendiculum *I M*, occurrens tum lineæ incidentiæ *G H* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *A a* in *R*; & linea emergentiæ *K I* producta occurrat *H M* in *L*. Centro *L* intervallo *L I* deſcribatur Circulus,

 ſecans

ſecans tam HM in P & Q, quam MI productam in N; & primo ſi attractio vel impulſus ponatur uniformis, erit (ex demonſtratis *Galilæi*) curva HI Parabola, cujus hæc eſt proprietas, ut rectangulum ſub dato latere recto & linea IM æquale ſit HM quadrato; ſed & linea HM biſecabitur in L. Unde ſi ad MI demittatur perpendiculum LO, æquales erunt MO, OR; & additis æqualibus ON, OI, fient totæ æquales MN, IR. Proinde cum IR detur, datur etiam MN; eſtque rectangulum NMI ad rectangulum ſub latere recto & IM, hoc eſt, ad HMq, in data ratione. Sed rectangulum NMI æquale eſt rectangulo PMQ, id eſt, differentiæ quadratorum MLq, & PLq ſeu LIq; & HMq datam rationem habet ad ſui ipſius quartam partem MLq: ergo datur ratio $MLq - LIq$ ad MLq, & diviſim, ratio LIq ad MLq, & ratio dimidiata LI ad ML. Sed in omni triangulo LMI, ſinus angulorum ſunt proportionales lateribus oppoſitis. Ergo datur ratio ſinus anguli incidentiæ LMR ad ſinum anguli emergentiæ LIR. *Q. E. D.*





Cas. 2. Tranſeat jam corpus ſucceſſive per ſpatia plura parallelis planis terminata, $AabB$, $BbcC$, &c. & agitetur vi quæ ſit in

ſingulis

ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo *Bb*, in data ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *Bb*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in data ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

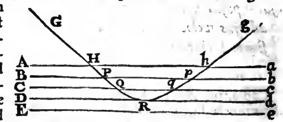
Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G* & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et (per Legum Corol. 2) diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus, agendo ſecundum lineas perpendiculares, nil mutat motum ſecundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id eſt, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc eſt (reſpectu radii *TH* vel *IK*) ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iiſdem poſitis & quod motus ante incidentiam velocior ſit quam poſtea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. deſcribere arcus Parabolicos, ut ſupra; ſintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*,&c. Et ſit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut ſinus incidentiæ ſit ad radium circuli, cujus eſt ſinus, in ea ratione quam habet idem ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano *Dd*, in ſpatium *DdeE*: & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt quod corpus non poteſt ultra pergere verſus planum *Ee*. Sed nec poteſt idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod



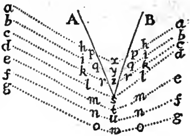
perpetuo attrahitur vel impellitur verſus Medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana *Cc*, *Dd*, deſcribendo arcum Parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi*) eſt in *R*; ſecabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, *h*, &c. ac prius in *P*, *H*, &c. emergetque tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulſus ſecundum legem quamcunque aſſignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ ſemper angulo incidentiæ æqualis exiſtens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*

Scholium.

Digitized by Google

Scholium.

Harum attractionum haud multum diſſimiles ſunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per conſequens ſecundum datam Sinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque Lucem ſucceſſive propagari & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam conſtat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Obſervationibus diverſorum Aſtronomorum confirmata. Radii autem in aere exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſa, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corporum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. In figura deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld*, ſunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro diſtantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *ckzkc*, *biyib*, *ahxha* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt Propoſitiones ſequentes in uſus Opticos ſubjungere; interea de natura radiorum (utrum ſint corpora necne) nihil omnino diſputans, ſed Trajectorias corporum Trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodo determinans.



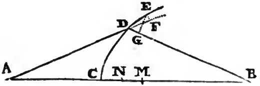
PROPO-

De Motu Corporum

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Poſito quod ſinus incidentiæ in ſuperficiem aliquam ſit ad ſinum emergentiæ in data ratione, quodque incurvatio viæ corporum juxta ſuperficiem illam fiat in ſpatio breviſſimo, quod ut punctum conſiderari poſſit; determinare ſuperficiem quæ corpuſcula omnia de loco dato ſucceſſive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus a quo corpuſcula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem AB revoluta deſcribat ſuperficiem quæſitam; D, E curvæ illius puncta duo quævis; & EF, EG perpendicula in corporis vias AD, DB demiſſa. Accedat punctum D ad punctum E; & lineæ DF qua AD augetur, ad lineam DG qua DB diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ. Datur ergo ratio



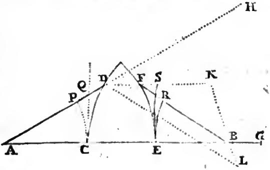
incrementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB; & propterea ſi in axe AB ſumatur ubivis punctum C, per quod curva CDE tranſire debet, & capiatur ipſius AC incrementum CM, ad ipſius BC decrementum CN in data illa ratione; centriſque A, B, & intervallis AM, BN deſcribantur circuli duo ſe mutuo ſecantes in D: punctum illud D tanget curvam quæſitam CDE, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C, habebuntur Figuræ illæ omnes quas *Carteſius* in Optica & Geometria ad Refractiones expoſuit. Quarum inventionem cum *Carteſius* maximi fecerit & ſtudioſe celaverit, viſum fuit hac propoſitione exponere.

Corol.

Digitized by Google

Corol. 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis *CD*, ſecundum lineam rectam *AD* lege quavis ductam incidens, emergat ſecundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur Lineæ curvæ *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DK* ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atq; adeo lineæ ipſæ *PD*, *QD*, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

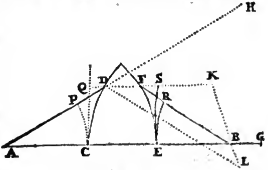
Iiſdem poſitis, & circa axem AB *deſcripta ſuperficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta *AB* ſecet ſuperficiem primam in *C* & ſecundam in *E*, puncto *D* utcunque aſſumpto. Et poſito ſinu incidentiæ in ſuperficiem primam ad ſinum emergentiæ ex eadem, & ſinu emergentiæ e ſuperficie ſecunda ad ſinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N; produc tum *AB* ad *G* ut ſit *BG* ad *CE* ut M—N ad N, tum *AD* ad *H* ut ſit *AH* æqualis *AG*, tum etiam *DF* ad *K* ut ſit *DK* ad *DH* ut N ad M. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* deſcribe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipſique *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget Lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta deſcribet ſuperficiem quæſitam. *Q. E. F.*

Nam concipe Lineas *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DF* reſpective, & Lineas *ER*, *ES* ipſis *FB*, *FD* ubique perpendiculares eſſe, adeoque *QS* ipſi *CE* ſemper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII) *PD* ad *QD* ut M ad N, adeoque ut *DL* ad *DK* vel *FB* ad *FK*;

Digitized by Google

& diviſim ut $DL-FB$ ſeu $PH-PD-FB$ ad FD ſeu $FQ-QD$; & compoſite ut $PH-FB$ ad FQ, id eſt (ob æquales PH & CG, QS & CE) $CE+BG-FR$ ad $CE-FS$. Verum (ob proportionales BG ad CE & M−N ad N) eſt etiam $CE+BG$ ad CE ut M ad N: adeoque diviſim FR ad FS ut M ad N, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII, ſuperficies EF cogit corpus, in ipſam ſecundum lineam DF incidens, pergere in linea FR ad locum B. *Q. E. D.*



Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad ſuperficies tres vel plures. Ad uſus autem Opticos maxime accommodatæ ſunt figuræ Sphæricæ. Si Perſpicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphærice figuratis & Aquam inter ſe claudentibus conflentur; fieri poteſt ut a refractionibus Aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum ſuperficiebus extremis, ſatis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda ſunt, non ſolum quod facilius & accuratius formari poſſint, ſed etiam quod Penicillos radiorum extra axem vitri ſitos accuratius refringant. Verum tamen diverſa diverſorum radiorum Refrangibilitas impedimento eſt, quo minus Optica per Figuras vel Sphæricas vel alias quaſcunque perfici poſſit. Niſi corrigi poſſint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

DE

Digitized by Google

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De Motu Corporum quibus reſiſtitur in ratione Velocitatis.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentia amiſſus eſt ut ſpatium movendo confectum.

Nam cum motus ſingulis temporis particulis æqualibus amiſſus ſit ut velocitas, hoc eſt, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amiſſus ut iter totum. *Q.E.D.*

Corol. Igitur ſi corpus, gravitate omni deſtitutum, in ſpatiis liberis ſola vi inſita moveatur; ac detur tum motus totus ſub initio, tum etiam motus reliquus poſt ſpatium aliquod confectum: dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt. Erit enim ſpatium illud ad ſpatium jam deſcriptum, ut motus totus ſub initio ad motus illius partem amiſſam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis ſuis proportionales, ſunt continue proportionales.

Sit A ad A − B ut B ad B − C & C ad C − D, &c. & dividendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q.E.D.*

Digitized by Google

De Motu Corporum

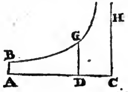
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si Corpori reſiſtitur in ratione velocitatis, & idem ſola vi inſita per Medium ſimilare moveatur, ſumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis ſingulorum temporum ſunt in progreſſione Geometrica, & ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & ſi ipſis particularum initiis agat vis reſiſtentiæ impulſo unico, quæ ſit ut velocitas: erit decrementum velocitatis ſingulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis ſuis proportionales, & propterea (per Lem. 1. Lib. 11.) continue proportionales. Proinde ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipſis temporum initiis, ut termini in progreſſione continua, qui per ſaltum capiuntur, omiſſo paſſim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea ſunt æquales. Igitur velocitates, his terminis proportionales, ſunt in progreſſione Geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continue proportionales, erunt in hoc etiam caſu continue proportionales. *Q.E.D.*

Cas. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt, earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: Spatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ, (per Prop. 1. Lib. 11.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi Aſymptotis rectangulis *ADC*, *CH* deſcribatur Hyperbola *BG*, ſintque *AB*, *DG* ad Aſymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia Medii, ipſo motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapſo autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi poteſt tempus per aream *ABGD*, & ſpatium eo tempore deſcriptum per lineam *AD*. Nam ſi area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum tempo-



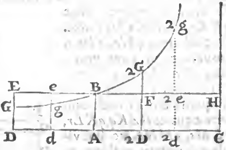
ris,

Digitized by Google

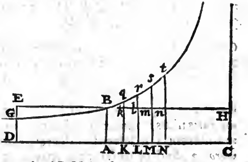
ris, decreſcet recta DC in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ AC æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eadem ratione. LIBER SECUNDUS.

PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui dum in Medio ſimilari recta aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.



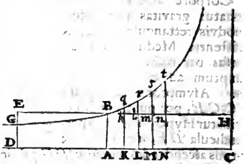
Corpore aſcendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum BC, & reſiſtentia Medii initio aſcenſus per rectangulum BD ſumptum ad contrarias partes. Aſymptotis rectangulis AC, CH, per punctum B deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula DE, de in G, g; & corpus aſcendendo, tempore $DGgd$, deſcribet ſpatium $EGge$, tempore $DGBA$ ſpatium aſcenſus totius EGB; tempore $AB2G2D$ ſpatium deſcenſus $BF2G$, atque tempore $2D2G2g2d$ ſpatium deſcenſus $2GF2e2g$: & velocitates corporis (reſiſtentiæ Medii proportionales) in horum temporum periodis erunt $ABED$, $ABed$, nulla, $ABF2D$, $AB2e2d$ reſpective; atque maxima velocitas, quam corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit BC.



Reſolvatur enim rectangulum AH in rectangula innumera Ak, Kl, Lm, Mn, &c. quæ ſint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, Ak, Al, Am, An, &c. ut velocitates totæ, atque adeo (per Hypotheſin) ut reſiſtentiæ Medii principio ſingulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi, deque vi gravi-

tatis

tatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt *ABHC, KkHC, LlHC, NnHC,* &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atque adeo (per motus Legem II) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula *Ak, Kl, Lm, Mn,* &c; & propterea (per Lem. I. Lib. II) in progreſſione Geometrica. Quare ſi rectæ *Kk, Ll, Mm, Nn,* &c. productæ occurrant Hyperbolæ in *q, r, s, t,* &c. erunt areæ *ABqK, KqrL, LrsM, MstN,* &c. æquales, adeoque tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. Eſt autem area *ABqK* (per Corol. 3. Lem. VII, & Lem. VIII, Lib. I) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad $\frac{1}{2}$ *kq* ſeu *AC* ad $\frac{1}{2}$ *AK*, hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et ſimili argumento areæ *qKLr, rLMs, sMNt,* &c. ſunt ad areas *qklr, rlms, smnt,* &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq, qKLr, rLMs, sMNt,* &c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq, qklr, rlms, smnt,* &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per Hypotheſin) velocitatibus, atque adeo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq, Blr, Bms, Bnt,* &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK, ABrL, ABsM, ABtN,* &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *LrtN* ſpatium *rlnt*. *Q.E.D.* Et ſimilis eſt demonſtratio motus expoſiti in aſcenſu. *Q.E.D.*



Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad vim reſiſtentiæ qua in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione Arithmetica, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis in aſcenſu (atque etiam earundem differentia in deſcenſu) decreſcit in progreſſione Geometrica.

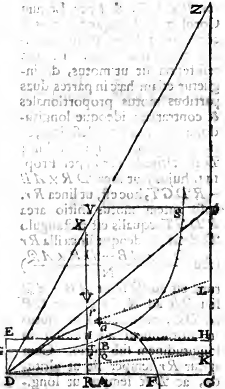
Corol. 3. Sed & differentiæ ſpatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eadem progreſſione Geometrica.

Corol.

Corol. 4. Spatium vero a corpore deſcriptum differentia eſt duorum ſpatiorum, quorum alterum eſt ut tempus ſumptum ab initio deſcenſus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipſo deſcenſus initio æquantur inter ſe.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Poſito quod vis gravitatis in Medio aliquo ſimilari uniformis ſit, ac tendat perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectilis in eodem, reſiſtentiam velocitati proportionalem patientis.

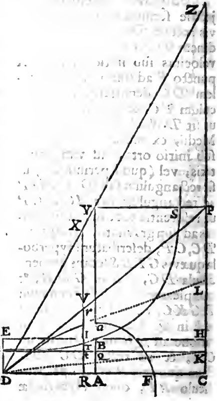


E loco quovis *D* egrediatur Projectile ſecundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejuſdem velocitas ſub initio motus. A puncto *P* ad lineam Horizontalem *DC* demittatur perpendiculum *PC*, & ſecetur *DC* in *A* ut ſit *DA* ad *AC* ut reſiſtentia Medii, ex motu in altitudinem ſub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde eſt) ut ſit rectangulum ſub *DA* & *DP* ad rectangulum ſub *AC* & *CP* ut reſiſtentia tota ſub initio motus ad vim gravitatis. Aſymptotis *DC*, *CP*, deſcribatur Hyperbola quævis *GTBS* ſecans perpendicula *DG*, *AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* ſecet *AB* in *Q*. Capiatur linea N in ratione ad *QB* qua *DC* ſit ad *CP*; & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *RT*, quod Hyperbolæ in *T*, & rectis *EH*, *GK*, *DP* in *I*, *t* & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel quod perinde

Digitized by Google

inde eſt, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$, & Projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, deſcribens curvam lineam $DraF$, quam punctum r ſemper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & poſtea ſemper appropinquans ad Aſymptoton PLC. Eſtque velocitas ejus in puncto quovis r ut Curvæ Tangens rL. *Q. E. I.*

Eſt enim N ad QB ut DC ad CP ſeu DR ad RV, adeoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id eſt $RV - Vr$ ſeu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per Legum Corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum aſcenſus, alterum ad latus. Et cum reſiſtentia ſit ut motus, diſtinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, a motu ad latus deſcripta, erit (per Prop. II. hujus) ut linea DR, altitudo vero (per Prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc eſt, ut linea Rr. Ipſo autem motus initio area $RDGT$ æqualis eſt rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (ſeu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc eſt ad DR ut $AB - AQ$ ſeu QB ad N, id eſt, ut CP ad DC; atque adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem ſub initio. Cum igitur Rr ſemper ſit ut altitudo, ac DR ſemper ut longitudo, atque Rr ad DR ſub initio ut altitudo ad longitudinem: neceſſe eſt ut Rr ſemper ſit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r perpetuo tangit. *Q. E. D.*



Corol.

Corol. 1. Eſt igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$, ideoque ſi producatur RT ad X ut ſit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$, (id eſt, ſi compleatur parallelogrammum $ACPT$, jungatur DT ſecans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DT in X;) erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Corol. 2. Unde ſi capiantur innumeræ CR vel, quod perinde eſt, innumeræ ZX, in progreſſione Geometrica; erunt totidem Xr in progreſſione Arithmetica. Et hinc Curva $DraF$ per tabulam Logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice D, diametro DE deorſum producta, & Latere recto quod ſit ad $2DP$ ut reſiſtentia tota, ipſo motus initio, ad vim gravitatis, Parabola conſtruatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D ſecundum rectam DP, ut in Medio uniformi reſiſtente deſcribat Curvam $DraF$, ea ipſa erit quacum exire debet de eodem loco D, ſecundum eandem rectam DP, ut in ſpatio non reſiſtente deſcribat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipſo motus initio, eſt $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ & Vr eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, ſi duceretur, Hyperbolam GTB tangeret in G, parallela eſt ipſi DK, ideoque Tt eſt $\frac{CK \times DR}{DC}$ & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr eſt $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id eſt, (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & Latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id eſt (ob proportionales QB & CK, DA & AC) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, adeoque ad $2DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 4. Unde ſi corpus de loco quovis D, data cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam DP projiciatur; & reſiſtentia Medii ipſo motus initio detur: inveniri poteſt Curva $DraF$, quam corpus idem deſcribet. Nam ex data velocitate

Ff datur

Digitized by Google

datur latus rectum Parabolæ, ut notum eſt. Et ſumendo $2DP$ ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur DP. Dein ſecando DC in A, ut ſit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum A. Et inde datur Curva $DraF$.



Corol. 5. Et contra, ſi datur Curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & reſiſtentia Medii in locis ſingulis r. Nam ex data ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum reſiſtentia Medii ſub initio motus, tum latus rectum Parabolæ: & inde datur etiam velocitas ſub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis r.

Corol. 6. Cum autem longitudo $2DP$ ſit ad latus rectum Parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in D; & ex aucta velocitate augeatur reſiſtentia in eadem ratione, at latus rectum Parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illa ſimplici, adeoque velocitati ſemper proportionalem eſſe, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, niſi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi Curvam $DraF$ ex Phænomenis quamproxime, & inde colligendi reſiſtentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eadem cum velocitate, de loco D, ſecundum angulos diverſos CDP, cDp (minuſcularum literarum locis ſubintellectis) & cognoſcantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, aſſumpta quacunque longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod reſiſtentia in D ſit ad gravitatem in ratione

tione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM. Deinde per computationem, ex longitudine illa aſſumpta DP, inveniantur longitudines DF, Df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum MN. Idem fac iterum ac tertio, aſſumendo ſemper novam reſiſtentiæ ad gravitatem rationem SM, & colligendo novam differentiam MN. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM, & negativæ ad alteram; & per puncta N, N, N agatur curva regularis NNN ſecans rectam $SMMM$ in X, & erit SX vera ratio reſiſtentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda eſt longitudo DF per calculum; & longitudo quæ ſit ad aſſumptam longitudinem DP, ut longitudo DF per experimentum cognita ad longitudinem DF modo inventam, erit vera longitudo DP. Qua inventa, habetur tum Curva linea $DraF$ quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.



Scholium.

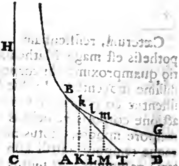
Cæterum, reſiſtentiam corporum eſſe in ratione velocitatis, Hypotheſis eſt magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardiſſime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant reſiſtentiæ corporum ſunt in duplicata ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; adeoque tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major; eſtque reſiſtentia (per motus Legem II & III) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Reſiſtentiæ.

SECTIO II.

De motu Corporum quibus reſiſtitur in duplicata ratione Velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si Corpori reſiſtitur in velocitatis ratione duplicata, & idem ſola vi inſita per Medium ſimilare movetur; tempora vero ſumantur in progreſſione Geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio ſingulorum temporum ſunt in eadem progreſſione Geometrica inverſe, & quod ſpatia ſunt æqualia quæ ſingulis temporibus deſcribuntur.



Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis eſt reſiſtentia Medii, & reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis; ſi tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum ſingulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in recta CD ſumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. Hyperbolæ $BklmG$, centro C Aſymptotis rectangulis CD, CH deſcriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. & erit AB ad Kk ut CK ad CA, & diviſim $AB-Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & viciſſim $AB-Kk$ ad AK ut Kk ad CA, adeoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, cum AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB-Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut ABq. Et ſimili argumento erunt $Kk-Ll$, $Ll-Mm$, &c. ut Kkq, Llq, &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm qua-

quadrata ſunt ut earundem differentiæ; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum differentiæ, ſimilis erit ambarum progreſſio. Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis *AK* exponatur per lineam *AB*, & velocitas initio ſecundi *KL* per lineam *Kk*, & longitudo primo tempore deſcripta per aream *AKkB*; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes *Ll*, *Mm*, &c. & longitudines deſcriptæ per areas *Kl*, *Lm*, &c. Et compoſite, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum *AM*, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum *AMmB*. Concipe jam tempus *AM* ita dividi in partes *AK*, *KL*, *LM*, &c. ut ſint *CA*, *CK*, *CL*, *CM*, &c. in progreſſione Geometrica; & erunt partes illæ in eadem progreſſione, & velocitates *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. in progreſſione eadem inverſa, atque ſpatia deſcripta *Ak*, *Kl*, *Lm*, &c. æqualia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Patet ergo quod, ſi tempus exponatur per Aſymptoti partem quamvis *AD*, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam *AB*; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam *DG*, & ſpatium totum deſcriptum per aream Hyperbolicam adjacentem *ABGD*; necnon ſpatium quod corpus aliquod eodem tempore *AD*, velocitate prima *AB*, in Medio non reſiſtente deſcribere poſſet, per rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur ſpatium in Medio reſiſtente deſcriptum, capiendo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi *AB* in medio non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area Hyperbolica *ABGD* ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam reſiſtentia Medii, ſtatuendo eam ipſo motus initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore *AC*, in Medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem *AB*. Nam ſi ducatur *BT* quæ tangat Hyperbolam in *B*, & occurrat Aſymptoto in *T*; recta *AT* æqualis erit ipſi *AC*, & tempus exponet quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam *AB*.

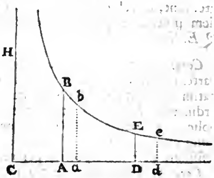
Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceverſa, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam; datur tempus *AC*, quo vis centripeta reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem quamvis *AB*: & inde

de datur punctum *B* per quod Hyperbola, Aſymptotis *CH*, *CD*, deſcribi debet; ut & ſpatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum ſuum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in Medio ſimilari reſiſtente deſcribere poteſt.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora Sphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus quæ ſunt reciproce ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Aſymptotis rectangulis *CD*, *CH* deſcripta Hyperbola quavis *BbEe* ſecante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Eſt ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per Hypotheſin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura Hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc eſt, ſpatia deſcripta æquantur inter ſe, & velocitates primæ *AB*, *DE* ſunt ultimis *ab*, *de*, & propterea (dividendo) partibus etiam ſuis amiſſis *AB−ab*, *DE−de* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora Sphærica quibus reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quæ ſunt ut motus primi directe & reſiſtentiæ primæ inverſe, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis in velocitates primas ductis proportionalia.

Namque motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ & tempora con-

Digitized by Google

conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & reſiſtentia inverſe. Quare temporum particulis in ea ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, adeoque retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicata ratione diametrorum: Globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujuſque erit ut ejus velocitas & Maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per Hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propoſitionem) eſt in ratione priore directe & ratione poſteriore inverſe, id eſt, ut diameter directe & velocitas inverſe; adeoque ſpatium (tempori & velocitati proportionale) eſt ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquialtera ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia quibus Globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia quibus Globi, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Igitur deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac ſub initio.

Corol. 4. Quod ſi Globi non ſint homogenei, ſpatium a Globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc Propoſitionem) augetur in ratione motus directe, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

Corol.

Corol. 5. Et ſi Globi moveantur in Mediis diverſis; ſpatium in Medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc Propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

LEMMA II.

Momentum Genitæ æquatur Momentis laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque, in Arithmetica per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, abſque additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt Facti, Quoti, Radices, Rectangula, Quadrata, Cubi, Latera quadrata, Latera cubica, & ſimiles. Has quantitates ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hic conſidero; & earum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine Momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. Lateris autem cujuſque generantis Coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus Lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $a\text{B} + b\text{A}$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $a\text{BC} + b\text{AC} + c\text{AB}$: & genitarum digni-

dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta
$2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpective. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut Genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB+bA^2$; & Genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$; & Genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ ſive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur vero Lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, ſeu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ ſeu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & manebit exceſſus $aB+bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB+bA$. *Q.E.D.*

Cas. 2. Ponatur AB ſemper æquale G, & contenti ABC ſeu GC momentum (per Cas. 1.) erit $gC+cG$, id eſt (ſi pro G & g ſcribantur AB & $aB+bA$) $aBC+bAC+cAB$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. *Q.E.D.*

Cas. 3. Ponantur latera A, B, C ſibi mutuo ſemper æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli AB, momentum $aB+bA$ erit $2aA$, ipſius autem A^3, id eſt contenti ABC, momentum $aBC+bAC+cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunque A^n eſt naA^{n-1}. *Q.E.D.*

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipſius 1, id eſt, nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ſeu ipſius A^{-1} eſt $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n

 una

De Motu Corporum

una cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ſeu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *Q. E D.*

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ ſit A, momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per Cas. 3: ideoque momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ſive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter ſi ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} ſeu $nbA^{-\frac{m}{n}}$, adeoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id eſt, æquale momento ipſius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuſcunque A^mB^n momentum eſt momentum ipſius A^m ductum in B^n, una cum momento ipſius B^n ducto in A^m, id eſt $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; idque ſive dignitatum indices m & n ſint integri numeri vel fracti, ſive affirmativi vel negativi. Et par eſt ratio contenti ſub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, ſi terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipſos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & ſi detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter ſe ut −2A, −B, D, 2E, 3F.

Corol. 2. Et ſi in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum eſt de lateribus rectanguli cujuſcunque dati.

Corol. 3. Et ſi ſumma vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritiſſimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum ſignificarem me compotem eſſe methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & ſimilia peragendi, quæ in terminis ſurdis æque ac in rationalibus procederet, & literis tranſpoſitis hanc ſententiam involventibus

Digitized by Google

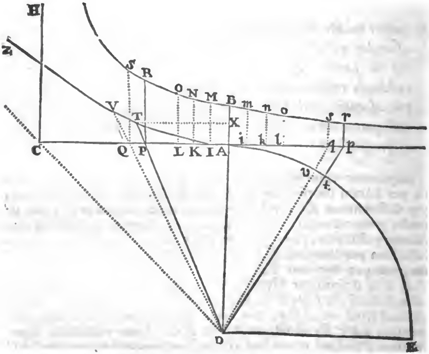
tibus [*Data Æquatione quotcunque Fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice verſa*] eandem celarem: reſcripſit Vir Clariſſimus ſe quoque in ejuſmodi methodum incidiſſe, & methodum ſuam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis, & Idea generationis quantitatum. Utriuſque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam Medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) colligantur vires abſolutæ; dico quod vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione Geometrica.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; reſiſtentia per lineam indefinitam AK; vis abſoluta in deſcenſu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP (quæ ſit media proportionalis inter AK & AC, ideoque in ſubduplicata ratione reſiſtentiæ;) incrementum reſiſtentiæ data temporis particula factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C Aſymptotis rectangulis CA, CH deſcribatur Hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO, PR, QS occurrens in B, N, O, R, S. Quoniam AK eſt ut APq, erit hujus momentum KL ut illius momentum $2APQ$, id eſt, ut AP in KC. Nam velocitatis incrementum PQ, (per motus Leg. II.) proportionale eſt vi generanti KC. Componatur ratio ipſius KL cum ratione ipſius KN, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc eſt, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP. Atqui areæ Hyperbolicæ $KNOL$ ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L, eſt æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evaneſcens eſt ut AP. Componitur igitur area tota Hyperbolica $ABOL$ ex particulis $KNOL$ velocitati AP ſemper proportionalibus, & propterea ſpatio velocitate iſta deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales $ABMI$, $IMNK$, $KNOL$, &c. & vires

res abſolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt in progreſſione Geometrica. *Q. E. D.* Et ſimili argumento, in aſcenſu corporis, ſumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. conſtabit quod vires abſolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. ſunt continue proportionales. Ideoque ſi ſpatia omnia in aſcenſu & deſcenſu capiantur æqualia; omnes vires abſolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continue proportionales. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc ſi ſpatium deſcriptum exponatur per aream Hyperbolicam *ABNK*; exponi poſſunt vis gravitatis, velocitas corporis & reſiſtentia Medii per lineas *AC*, *AP* & *AK* reſpective; & vice verſa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum deſcendendo poteſt unquam acquirere, exponens eſt linea *AC*.

Corol. 3. Igitur ſi in data aliqua velocitate cognoſcatur reſiſtentia Medii, invenietur velocitas maxima, ſumendo ipſam ad velocitatem

Digitized by Google

tatem illam datam in ſubduplicata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii reſiſtentiam illam cognitam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Poſitis jam demonſtratis, dico quod ſi Tangentes angulorum ſectoris Circularis & ſectoris Hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcenſus futuri ut ſector Circuli, & tempus omne deſcenſus præteriti ut ſector Hyperbolæ.

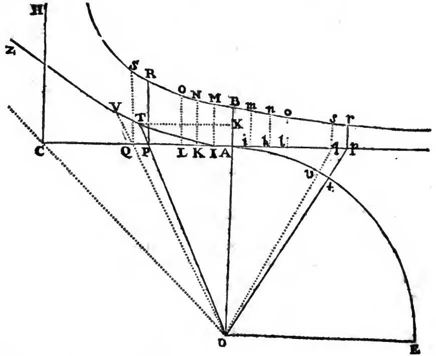
Rectæ AC, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur $A\mathcal{D}$. Centro $\mathcal{D}$ ſemidiametro $A\mathcal{D}$ deſcribatur tum Circuli quadrans AtE, tum Hyperbola rectangula AVZ axem habens AX, verticem principalem A & Aſymptoton $\mathcal{D}C$. Jungantur $\mathcal{D}p$, $\mathcal{D}P$, & erit ſector Circularis $At\mathcal{D}$ ut tempus aſcenſus omnis futuri; & ſector Hyperbolicus $AT\mathcal{D}$ ut tempus deſcenſus omnis præteriti. Si modo ſectorum Tangentes Ap, AP ſint ut velocitates.

Cas. 1. Agatur enim $\mathcal{D}vq$ abſcindens ſectoris $A\mathcal{D}t$ & trianguli $A\mathcal{D}p$ momenta, ſeu particulas quam minimas ſimul deſcriptas $t\mathcal{D}v$ & $p\mathcal{D}q$. Cum particulæ illæ, ob angulum communem $\mathcal{D}$, ſunt in duplicata ratione laterum, erit particula $t\mathcal{D}v$ ut $\frac{q\mathcal{D}p}{p\mathcal{D}\,quad}$. Sed $p\mathcal{D}\,quad.$ eſt $A\mathcal{D}\,quad + Ap\,quad.$ id eſt, $A\mathcal{D}\,quad + A\mathcal{D} \times Ak$ ſeu $A\mathcal{D} \times Ck$; & $q\mathcal{D}p$ eſt $\frac{1}{2} A\mathcal{D} \times pq$. Ergo ſectoris particula $t\mathcal{D}v$ eſt ut $\frac{pq}{Ck}$, id eſt, ut velocitatis decrementum quam minimum pq directe & vis illa Ck quæ velocitatem diminuit inverſe, atque adeo ut particula temporis decremento reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum omnium $t\mathcal{D}v$ in ſectore $A\mathcal{D}t$, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq reſpondentium, uſque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, ſector totus $A\mathcal{D}t$ eſt ut aſcenſus totius futuri tempus. *Q. E. D.*

Cas.

Digitized by Google

Cas. 2. Agatur DQV abſcindens tum ſectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & PDQ; & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq. ad DPq. id eſt (ſi TX & AP parallelæ ſint) ut DXq. ad DAq. vel TXq. ad APq. & diviſim ut $DXq - TXq$ ad $DAq - APq$. Sed ex natura Hyperbolæ $DXq - TXq$ eſt ADq, & per Hypotheſin APq eſt $AD \times AK$. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut ADq ad



$ADq - AD \times AK$; id eſt, ut AD ad $AD - AK$ ſeu AC ad CK: ideoque ſectoris particula TDV eſt $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, atque adeo ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id eſt, ut incrementum velocitatis directe utque vis generans incrementum inverſe, atque adeo ut particula temporis incremento reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ

PQ

PQ generantur, ut ſumma particularum ſectoris ATD, id eſt, tempus totum ut ſector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi AB æquetur quartæ parti ipſius AC, ſpatium quod corpus tempore quovis cadendo deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus velocitate maxima AC, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area $ABNK$, qua ſpatium cadendo deſcriptum exponitur, ad aream ATD qua tempus exponitur. Nam cum ſit AC ad AP ut AP ad AK, erit (per Corol. 1, Lem. 11 hujus) LK ad PQ ut $2AK$ ad AP, hoc eſt, ut $2AP$ ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}PQ$ ut AP ad ($\frac{1}{4}AC$ vel) AB; eſt & KN ad (AC vel) AD ut AB ad CK; itaque ex æquo LKN ad DPQ ut AP ad CK. Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rurſus ex æquo LKN eſt ad DTV ut AP ad AC; hoc eſt, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cum igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta LKN & DTV ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ $ABNK$ & ATD ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quod ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore deſcriptum, ut eſt area $ABnk$ ad ſectorem ADt.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum APD ad ſectorem Hyperbolicum ATD. Nam velocitas in Medio non reſiſtente foret ut tempus ATD, & in Medio reſiſtente eſt ut AP, id eſt, ut triangulum APD. Et velocitates illæ initio deſcenſus æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ ATD, APD.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum ApD ad ſectorem Circularem AtD, ſive ut recta Ap ad arcum At.

Corol. 5. Eſt igitur tempus quo corpus in Medio reſiſtente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam AC in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, ut ſector ADT ad triangulum ADC: & tempus, quo velocitatem Ap in Medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem

Digitized by Google

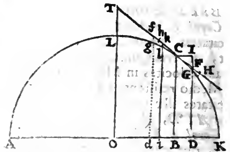
citatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut arcus At ad ejus tangentem Ap.

Corol 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima, per Corol. 2, & 3, Theor. VI, Lib. II; indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo Sectorem $A\mathcal{D}T$ vel $A\mathcal{D}t$ ad triangulum $A\mathcal{D}C$ in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; dabitur tum velocitas AP vel Ap, tum area $ABNK$ vel $ABnk$, quæ eſt ad ſectorem $A\mathcal{D}T$ vel $A\mathcal{D}t$ ut ſpatium quæſitum ad ſpatium quod tempore dato, cum velocitate illa maxima jam ante inventa, uniformiter deſcribi poteſt.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato aſcenſus vel deſcenſus ſpatio $ABnk$ vel $ABNK$, dabitur tempus $A\mathcal{D}t$ vel $A\mathcal{D}T$.

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, ſitque reſiſtentia ut Medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iiſdem locis.



Sit AK planum illud plano Schematis perpendiculare; ACK linea curva; C corpus in ipſa motum, & FCf recta ipſam tangens in C. Fingatur autem corpus C nunc progredi ab A ad K per lineam illam ACK, nunc vero regredi per eandem lineam; & in progeſſu impediri a Medio, in regreſſu æque promoveri, ſic ut in iiſdem locis eadem ſemper ſit corporis progredientis & regredientis velocitas. Æqualibus autem temporibus deſcribat corpus progrediens arcum quam minimum CG, & corpus regrediens arcum Cg; & ſint CH, Ch longitudines æquales rectilineæ, quas corpora de loco C exeuntia, his temporibus, abſque Medii & Gravitatis actionibus deſciberent: & a punctis C, G, g ad planum horizontale AK demittantur

Et tempora quibus corpus deſcribit arcus GH, HI, erunt in ſubduplicata ratione altitudinum LH, NI quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, a tangentibus cadendo: & velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ GH, HI directe & tempora inverſe. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$: & decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a reſiſtentia corpus retardante & gravitate corpus accelerante. Gravitas in corpore cadente & ſpatium NI cadendo deſcribente, generat velocitatem qua duplum illud ſpatium eodem tempore deſcribi potuiſſet (ut *Galilæus* demonſtravit) id eſt, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI deſcribente, auget arcum illum ſola longitudine $HI-HN$ ſeu $\frac{MI\times NI}{HI}$, ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI\times NI}{t\times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentia ſola oriundum, nempe $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}+\frac{2MI\times NI}{t\times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; Reſiſtentia erit ad Gravitatem ut $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}+\frac{2MI\times NI}{t\times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t\times GH}{T}-HI+\frac{2MI\times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abſciſſis CB, CD, CE ſcribantur $-o$, o, $2o$. Pro Ordinata CH ſcribatur P, & pro MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo+Roo+So^3+$&c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo+So^3+$&c. erunt NI, & Ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P-Qo-Roo-So^3-$&c, $P-2Qo-4Roo-8So^3-$&c, & $P+Qo-Roo+So^3-$&c. reſpective. Et quadrando differentias Ordinatarum $BG-CH$ & $CH-DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo+QQoo-2QRo^3+$&c, & $oo+QQoo+2QRo^3+$&c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ}-\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, &

$o\sqrt{1+QQ}+\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab Ordinata CH ſubducatur ſemiſumma Ordinatarum BG ac DI, & ab Ordinata DI ſubducatur ſemiſumma Ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK ſagittæ Roo & $Roo+3So^3$. Et hæ ſunt lineolis LH & NI proportionales, adeoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & t, & inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ ſeu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$: & $\frac{t\times GH}{T}-HI+\frac{2MI\times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cum $2NI$ ſit $2Roo$, Reſiſtentia jam erit ad Gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id eſt, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea eſt quacum corpus de loco quovis H, ſecundum tangentem HN egrediens, in Parabola diametrum HC & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ ſeu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps in vacuo moveri poteſt.

Et reſiſtentia eſt ut Medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea Medii denſitas eſt ut reſiſtentia directe & quadratum velocitatis inverſe, id eſt, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directe & $\frac{1+QQ}{R}$ inverſe, hoc eſt, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q.E.I.*

Corol. 1. Si tangens HN producatur utrinque donec occurrat Ordinatæ cuilibet AF in T: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$, adeoque in ſuperioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribi poteſt. Qua ratione Reſiſtentia erit ad Gravitatem ut $3S\times HT$ ad $4RR\times AC$, Velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & Medii denſitas erit ut $\frac{S\times AC}{R\times HT}$.

Corol. 2. Et hinc, ſi Curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam AC & ordinatim applicatam CH,

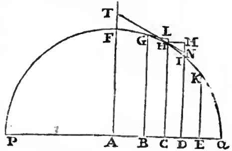
Digitized by Google

CH, (ut moris eſt) & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.

Exempl. 1. Sit Linea *PFHQ* Semicirculus ſuper diametro *PQ* deſcriptus, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur diameter *PQ* in *A*, dic *AQ* n, *AC* a, *CH* e, & *CD* o: & erit DIq ſeu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, ſeu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum noſtram extracta, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5}$ — &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; ſecundum in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis, tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium eſt, & ſic in infinitum. Et primus terminus qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem Ordinatæ *CH* inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o; ſecundus terminus qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam



inter *CH* & *DN*, id eſt, lineolam *MN* quæ abſcinditur complendo parallelogrammum *HCDM*, atque adeo poſitionem tangentis *HN* ſemper determinat: ut in hoc caſu capiendo *MN* ad *HM* ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$ deſignabit lineolam *IN* quæ jacet inter tangentem & curvam, adeoque determinat angulum contactus *IHN* ſeu curvaturam quam curva linea habet in *H*. Si lineola illa *IN* finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum,

Digitized by Google

termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum Serierum in ſolutione Problematum quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Conferatur jam ſeries $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c, cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$ & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit Medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc eſt, (ob datam n,) ut $\frac{a}{e}$, ſeu $\frac{AC}{CH}$, id eſt, ut tangentis longitudo illa HT quæ ad ſemidiametrum AF ipſi PQ normaliter inſiſtentem terminatur: & reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id eſt, ut $3AC$ ad Circuli diametrum PQ: velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare ſi corpus juſta cum velocitate ſecundum lineam ipſi PQ parallelam exeat de loco F, & Medii denſitas in ſingulis locis H ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad PQ, corpus illud deſcribet Circuli quadrantem FHQ. *Q.E.I.*

At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi PFQ moveri inciperet, ſumenda eſſet AC ſeu a ad contrarias partes centri A, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, Natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus aſcendendo a P deſcribat Circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

Exempl. 2. Sit linea $PFHQ$ Parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in ipſa moveatur.

Ex natura Parabolæ, rectangulum PDQ æquale eſt rectangulo ſub ordinata DI & recta aliqua data: hoc eſt, ſi dicantur recta

Digitized by Google

recta illa b, PC a, PQ c, CH e & CD o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ ſeu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale eſt rectangulo b in DI, adeoque DI æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum vero plures non ſint termini, debebit quarti coefficiens S evaneſcere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ cui Medii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nulla igitur Medii denſitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonſtravit *Galilæus*. *Q.E.I.*

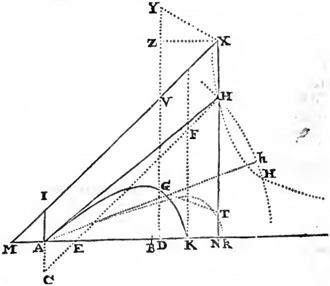
Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, Aſymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit MX Aſymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb; & completo parallelogrammo $DNXZ$, dicatur BN a, BD o, NX c, & ratio data VZ ad ZX vel DN ponatur eſſe $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD ſeu $NX-VZ-VG$ æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Reſolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in ſeriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt in Regula ſuperiore, pro Q, R & S. Quo facto prodit medii denſitas ut

Digitized by Google

De Motu Corporum

ut $\dfrac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ ſeu $\dfrac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id eſt, ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ ſunt ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3XY$ ad



$2YG$ & velocitas ea eſt quacum corpus in Parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY\,quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod Medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciproce ut diſtantiæ XY, quodque reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut $3XY$ ad $2YG$; & corpus de loco A, juſta cum velocitate emiſſum, deſcribet Hyperbolam illam AGK. *Q.E.I.*

Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea AGK Hyperbola ſit, centro X Aſymptotis MX, NX ea lege deſcripta, ut conſtructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD ſecet Hyperbolam in G & Aſymp-

Aſymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce ut ipſius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, cujus index eſt numerus n: & quæratur Medii denſitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro BN, BD, NX ſcribantur A, O, C reſpective, ſitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis $A-O$, $VG=\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$, $VZ=\frac{d}{e}\overline{A-O}$, & GD ſeu $NX-VZ-VG$ æqualis $C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$. Reſolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$ in ſeriem infinitam $\frac{bb}{A^n}+\frac{nbb}{A^{n+1}}O+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2+\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet GD æqualis $C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O-\frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2-\frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde Medii denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, adeoque ſi in VZ capiatur VY æqualis $n\times VG$, denſitas illa eſt reciproce ut XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut 3S in $\frac{XY}{A}$ ad 4RR, id eſt, XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ ſeu $\frac{2\,XY\,quad.}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q.E.I.*

Scholium

Scholium.

Eadem ratione qua prodiit denſitas Medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Corollario primo, ſi reſiſtentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n prodibit denſitas Medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$.

Et propterea ſi Curva inveniri poteſt ea lege ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}\Big|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}\big|^{n-1}$: corpus movebitur in hac Curva in uniformi Medio cum reſiſtentia quæ ſit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad Curvas ſimpliciores.

Quoniam motus non fit in Parabola niſi in Medio non reſiſtente, in Hyperbolis vero hic deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt quod Linea, quam projectile in Medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propius accedit ad Hyperbolas haſce quam ad Parabolam. Eſt utique linea illa Hyperbolici generis, ſed quæ circa verticem magis diſtat ab Aſymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipſas accedit quam pro ratione Hyperbolarum quas hic deſcripſi. Tanta vero non eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ vero in uſum ſic deducentur.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & recta GT tanget Hyperbolam in G, ideoque denſitas Medii in G eſt reciproce ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2} GV$.

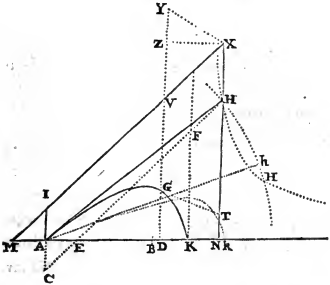
Proinde ſi corpus de loco A ſecundum rectam AH projectum deſcribat Hyperbolam AGK, & AH producta occurrat Aſymptoto MX in H, actaque AI eidem parallela occurrat alteri Aſymptoto MX in I: erit Medii denſitas in A reciproce ut AH, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad gravitatem ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in AI. Unde prodeunt ſequentes Regulæ.

Reg. 1.

Reg. 1. Si ſervetur tum Medii denſitas in A, tum velocitas quacum corpus projicitur, & mutetur angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX. Ideoque ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expedite determinari poteſt.

Reg. 2. Si ſervetur tum angulus NAH, tum Medii denſitas in A, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; ſervabitur longitudo AH, & mutabitur AI in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus NAH quam corporis velocitas in A, gravitaſque acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in A ad



gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque: augebitur proportio AH ad AI in eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$; & propterea minuetur AH in eadem ratione, & AI minuetur in ratione illa duplicata. Augetur vero proportio reſiſtentiæ ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub æquali magnitudine fit minor, vel Medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

 Reg.

Digitized by Google

Reg. 4. Quoniam denſitas Medii prope verticem Hyperbolæ major eſt quam in loco A, ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium GT ad tangentem AH inveniri, & denſitas in A augeri in ratione paulo majore quam ſemiſummæ harum tangentium ad minimam tangentium GT.

Reg. 5. Si dantur longitudines AH, AI, & deſcribenda ſit Figura AGK: produc HN ad X, ut ſit HX æqualis facto ſub $n+1$ & AI; centroque X & Aſymptotis MX, NX per punctum A deſcribatur Hyperbola, ea lege, ut ſit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n.

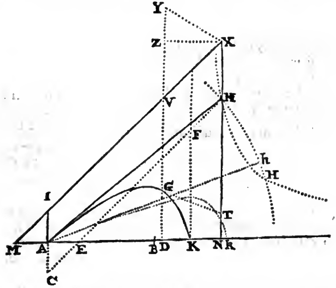
Reg. 6. Quo major eſt numerus n, eo magis accuratæ ſunt hæ Hyperbolæ in aſcenſu corporis ab A, & minus accuratæ in ejus deſcenſu ad K; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, eſtque cæteris ſimplicior. Igitur ſi Hyperbola ſit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A tranſeuntem, quæratur: occurrat producta AN Aſymptotis MX, NX in M & N, & ſumatur NK ipſi AM æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eadem velocitate, in angulis diverſis HAK, hAk, incidantque in planum Horizontis in K & k; & notetur proportio AK ad Ak. Sit ea d ad e. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo AI, aſſume utcunque longitudinem AH vel Ah, & inde collige graphice longitudines AK, Ak, per Reg. 6. Si ratio AK ad Ak ſit eadem cum ratione d ad e, longitudo AH recte aſſumpta fuit. Sin minus, cape in recta infinita SM longitudinem SM æqualem aſſumptæ AH, & erige perpendiculum MN æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus AH invenienda ſunt plura puncta N, & per omnia agenda Curva linea regularis $NNXN$, ſecans rectam $SMMM$ in X. Aſſumatur demum AH æqualis abſciſſæ SX, & inde denuo inveniatur longitudo AK; & longitudines, quæ ſint ad aſſumptam longitudinem AI & hanc ultimam AH ut longitudo AK per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem AK, erunt veræ illæ longitudines AI & AH, quas invenire oportuit. Hiſce vero datis dabitur & reſiſtentia Medii in loco A, quippe quæ ſit ad vim gravitatis ut AH ad $2AI$. Augenda eſt autem denſitas Medii per Reg. 4; & reſiſtentia modo inventa, ſi in eadem ratione augeatur, fiet accuratior.



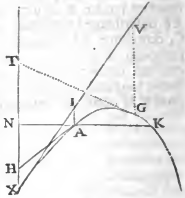
Reg.

Reg. 8. Inventis longitudinibus *AH*, *HX*; ſi jam deſideretur poſitio rectæ *AH*, ſecundum quam Projectile, data illa cum velocitate emiſſum, incidit in punctum quodvis *K*: ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *AC*, *KF* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorſum tendat, & æquetur ipſi *AI* ſeu $\frac{1}{2}HX$. Aſymptotis *AK*, *KF* deſcribatur Hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum *C*, centroque *A* & intervallo *AH* deſcribatur Circulus ſecans Hyperbolam illam in puncto *H*; & Projectile ſecundum rectam *AH* emiſſum incidet in punctum *K*. *Q.E.I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in Circulo deſcripto. Agatur *CH* occurrens ipſis *AK* & *KF*, illi in *E*, huic in *F*; & ob



parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, & propterea etiam æqualis *KN*. Sed *CE* eſt ad *AE* ut *FH* ad *KN*, & propterea *CE* & *FH* æquantur. Incidit ergo punctum *H* in Hyperbolam Aſymptotis *AK*, *KF* deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum *C*, atque adeo reperitur in communi interſectione Hyperbolæ hujus & Circuli deſcripti. *Q.E.D.* Notandum eſt autem quod hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta *AKN* horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodque ex duabus interſectionibus *H*, *H* duo prodeunt anguli *NAH*, *NAH*; & quod in Praxi mechanica ſufficit

Circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam *CH* ita applicare ad punctum *C*, ut ejus pars *FH*, Circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis ſit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *AK* ſitæ.



Quæ de Hyperbolis dicta ſunt facile applicantur ad Parabolas. Nam ſi *XAGK* Parabolam deſignet quam recta *XV* tangat in vertice *X*, ſintque ordinatim applicatæ *IA*, *VG* ut quælibet abſciſſarum *XI*, *XV* dignitates XI^n, XV^n; agantur *XT*, *GT*, *AH*, quarum *XT* parallela ſit *VG*, & *GT*, *AH* Parabolam tangant in *G* & *A*: & corpus de loco quovis *A*, ſecundum rectam *AH* productam, juſta cum velocitate projectum, deſcribet hanc Parabolam, ſi modo denſitas Medii, in locis ſingulis *G*, ſit reciproce ut tangens *GT*. Velocitas autem in *G* ea erit quacum Projectile pergeret, in ſpatio non reſiſtente, in Parabola Conica verticem *G*, diametrum *VG* deorſum productam, & latus rectum $\frac{2GTq.}{nn-n \times VG}$ habente. Et reſiſtentia in *G* erit ad vim gravitatis ut *GT* ad $\frac{3nn-3n}{n-2}VG$. Unde ſi *NAK* lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate Medii in *A*, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*, & inde datur Parabolæ vertex *X*, & poſitio rectæ *XI*, & ſumendo *VG* ad *IA* ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta *G*, per quæ Projectile tranſibit.

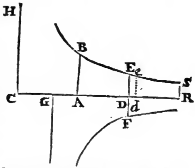
SECTIO

SECTIO III.

De Motu Corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si Corpori reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & idem ſola vi inſita in Medio ſimilari movetur, ſumantur autem tempora in progreſſione Arithmetica: quantitates velocitatibus reciproce proportionales, datâ quadam quantitate auctæ, erunt in progreſſione Geometrica.



Centro *C*, Aſymptotis rectangulis *CADd* & *CH*, deſcribatur Hyperbola *BEeS*, & Aſymptoto *CH* parallelæ ſint *AB*, *DE*, *de*. In Aſymptoto *CD* dentur puncta *A*, *G*: Et ſi tempus exponatur per aream Hyperbolicam *ABED* uniformiter creſcentem; dico quod velocitas exponi poteſt per longitudinem *DF*, cujus reciproca *GD* una cum data *CG* componat longitudinem *CD* in progreſſione Geometrica creſcentem.

Sit enim areola *DEed* datum temporis incrementum quam minimum, & erit *Dd* reciproce ut *DE*, adeoque directe ut *CD*. Ipſius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem. 11) eſt $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ ſeu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id eſt, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore *ABED* per additionem datarum particularum *EDde* uniformiter creſcente, decreſcit $\frac{1}{GD}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia, hoc eſt (per Hypotheſin) ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velo-

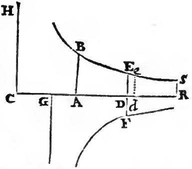
velocitas, altera ut quadratum velocitatis: & ipſius $\frac{1}{GD}$ decrementum eſt ut ſumma quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior eſt ipſa $\frac{1}{GD}$, & poſterior $\frac{CG}{GDq}$ eſt ut $\frac{1}{GDq}$. Proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, eſt ut velocitas. Et ſi quantitas *GD*, ipſi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis, quantitate data *CG* augeatur; ſumma *CG*, tempore *ABED* uniformiter creſcente, creſcet in progreſſione Geometrica. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur ſi, datis punctis *A*, *G*, exponatur tempus per aream Hyperbolicam *ABED*, exponi poteſt velocitas per ipſius *GD* reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem *GA* ad *GD* ut velocitatis reciproca ſub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis *ABED*, invenietur punctum *G*. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri poteſt.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iiſdem poſitis, dico quod ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progreſſione Geometrica.



In Aſymptoto *CD* detur punctum *R*, & erecto perpendiculo *RS*, quod occurrat Hyperbolæ in *S*, exponatur deſcriptum ſpatium per aream Hyperbolicam *RSED*; & velocitas erit ut longitudo *GD*, quæ cum data *CG* componit longitudinem *CD*, in progreſſione Geometrica decreſcentem, interea dum ſpatium *RSED* augetur in Arithmetica.

Etenim ob datum ſpatii incrementum *EDde*, lineola *Dd*, quæ decre-

Digitized by Google

decrementum eſt ipſius GD, erit reciproce ut ED, adeoque directe ut CD, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem GD & longitudinis datæ CG. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciproce proportionali, quo data ſpatii particula $DdeE$ deſcribitur, eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim, id eſt, directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverſe ut velocitas; adeoque directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ GD, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim, & propter analoga decrementa, analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes: nimirum velocitas & linea GD. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur ſi velocitas exponatur per longitudinem GD, ſpatium deſcriptum erit ut area Hyperbolica $DESR$.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum R, invenietur punctum G, capiendo GR ad GD, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis $RSED$ deſcriptum. Invento autem puncto G, datur ſpatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum, per Prop. XI, detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propoſitionem detur ſpatium ex data velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contra.

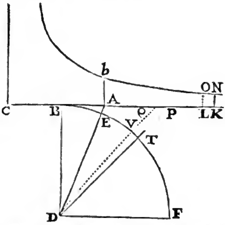
PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Poſito quod Corpus ab uniformi gravitate deorſum attractum recta aſcendit vel deſcendit, & quod eidem reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata: dico quod ſi Circuli & Hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contra.

Caſ. 1. Ponamus primo quod corpus aſcendit, centroque D & ſemidiametro quovis DB deſcribatur Circuli quadrans $BETF$, & per ſemidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, ſemidiametro DF parallela. In ea detur punctum A, & capiatur ſegmentum AP velocitati proportionale. Et cum reſiſtentiæ pars aliqua ſit ut

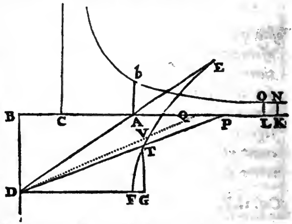
Digitized by Google

ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum, ſit reſiſtentia tota in *P* ut *AP quad* + 2 *BAP*. Jungantur *DA DP* Circulum ſecantes in *E* ac *T*, & exponatur gravitas per *DA quad*, ita ut ſit gravitas ad reſiſtentiam in *P* ut *DAq* ad *APq* + 2 *BAP*: & tempus aſcenſus omnis futuri erit ut Circuli ſector *EDTE*.



Agatur enim *DVQ*, abſcindens & velocitatis *AP* momentum *PQ*, & Sectoris *DET* momentum *DTV* dato temporis momento reſpondens: & velocitatis decrementum illud *PQ* erit ut ſumma virium gravitatis *DAq* & reſiſtentiæ *APq* + 2 *BAP*, id eſt (per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) ut *DP quad.* Proinde area *DPQ*, ipſi *PQ* proportionalis, eſt ut *DP quad*; & area *DTV*, (quæ eſt ad aream *DPQ* ut *DTq* ad *DPq*) eſt ut datum *DTq*. Decreſcit igitur area *EDT* uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori aſcenſus futuri proportionalis eſt. *Q.E.D.*

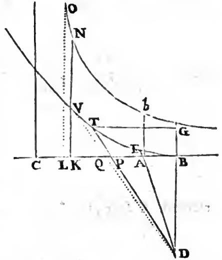
Caſ. 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem *AP* ut prius, & reſiſtentia ponatur eſſe ut *APq* + 2 *BAP*, & ſi vis gravitatis minor ſit quam quæ per *DAq* exponi poſſit; capiatur *BD* ejus longitudinis, ut ſit *ABq* − *BDq* gravitati proportionale, ſitque *DF* ipſi *DB* perpendicularis & æqualis, & per verticem *F* deſcribatur Hyperbola *FTVE* cujus ſemidiametri conjugatæ ſunt *DB* & *DF*, quæque ſecet *DA* in *E*, & *DP*, *DQ* in *T* & *V*; & erit tempus aſcenſus futuri ut Hyperbolæ ſector *TDE*.



Nam

Nam velocitatis decrementum PQ, in data temporis particula factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, id eſt, ut $BPq - BDq$. Eſt autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq adeoque, ſi ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq ſeu $GDq - DFq$ ad BDq utque GDq ad BPq & diviſim ut DFq ad $BPq - BDq$. Quare cum area DPQ ſit ut PQ, id eſt, ut $BPq - BDq$; erit area DTV ut datum DFq. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & $APq + 2BAP$ reſiſtentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, exiſtente angulo DBA recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur Hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit Hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus deſcenſus.



Nam velocitatis incremẽtum PQ, eique proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ ſeu $BDq - BPq$. Et area DTV eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, adeoque ut GTq ſeu $GDq - BDq$ ad BPq utque GDq ad BDq & diviſim ut BDq ad $BDq - BPq$. Quare cum area DPQ ſit ut $BDq - BPq$, erit area DTV ut datum BDq. Creſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Corol. Igitur velocitas AP eſt ad velocitatem quam corpus tempore EDT, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DAP ad aream ſectoris centro D, radio DA, angulo ADT deſcripti; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in Medio non reſiſtente, tem-

 pori atque adeo ſectori huic proportionalis eſt; in Medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in Medio utroque, ubi quam minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more ſectoris & trianguli.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iiſdem poſitis, dico quod ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum, eſt ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujuſdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progreſſione Arithmetica; ſi vires ex reſiſtentia & gravitate compoſitæ ſumantur in progreſſione Geometrica.

Capiatur AC (in Fig. tribus ultimis,) gravitati, & AK reſiſtentiæ proportionalis. Capiantur autem ad eaſdem partes puncti A ſi corpus deſcendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab quæ ſit ad DB ut DBq ad $4BAC$: & area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progreſſione Arithmetica, dum vires CK in progreſſione Geometrica ſumuntur. Dico igitur quod diſtantia corporis ab ejus altitudine maxima ſit ut exceſſus areæ $AbNK$ ſupra aream DET.

Nam cum AK ſit ut reſiſtentia, id eſt, ut $APq + 2BAP$; aſſumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (per hujus Lemma II.) erit ipſius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ ſeu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ ſeu $\frac{BPQ \times BD\,cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

Caſ. 1. Jam ſi corpus aſcendit, ſitque gravitas ut $ABq + BDq$ exiſtente BET Circulo, (in Fig. Caſ. 1. Prop. XIII.) linea AC, quæ gravitati proportionalis eſt, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & DPq ſeu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$.

Caſ.

Digitized by Google

Caſ. 2. Sin corpus aſcendit, & gravitas ſit ut $ABq - BDq$ linea AC (Fig. Caſ. 1. Prop. XIII) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & DTq erit ad DPq ut DFq ſeu DBq ad $BPq - BDq$ ſeu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id eſt, ad $AK \times Z + AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Caſ. 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut $BDq - ABq$, & linea AC (Fig. Caſ. 3. Prop. præced.) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut ſupra.

Cum igitur areæ illæ ſemper ſint in hac ratione; ſi pro area DTV, qua momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area DPQ, id eſt, $\frac{1}{2}BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ ſuperius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$) ut velocitas AP, id eſt, ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud, proportionalibus momentis creſcentia vel decreſcentia & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia, ſunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur ſi longitudo aliqua V ſumatur in ea ratione ad duplum longitudinis M, quæ oritur applicando aream DET ad BD, quam habet linea DA ad lineam DE; ſpatium quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in Medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium quod in Medio non reſiſtente eodem tempore deſcribere poſſet, ut arearum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$, ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in Medio non reſiſtente eſt in duplicata ratione temporis, ſive ut V^2, & ob datas BD & AB, ut

Digitized by Google

De Motu Corporum $\frac{BD \times V^2}{4AB}$. Momentum hujus areæ ſive huic æqualis $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$ eſt ad momentum differentiæ arearum DET & $AbNK$, ut $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$ ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, hoc eſt, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2} BD \times AP$, ſive ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP; adeoque ubi areæ DET & DAP quam minimæ ſunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur eſt area quam minima $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ differentiæ quam minimæ arearum DET & $AbNK$. Unde cum ſpatia in Medio utroque, in principio deſcenſus vel fine aſcenſus ſimul deſcripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc ſunt ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia; ob eorum analoga incrementa neceſſe eſt ut in æqualibus quibuſcunque temporibus ſint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*

SECTIO

Digitized by Google

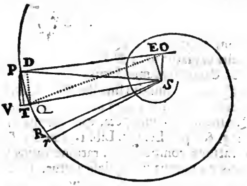
SECTIO IV.

De Corporum Circulari Motu in Mediis reſiſtentibus.

LEMMA III.

Sit PQRr *Spiralis quæ ſecet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* SQ *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × 2PS *ad* PQ*quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* ſubducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo Circulus qui tranſit per puncta *O*, *S*, *P* tranſibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic Circulus in loco coitus *PQ* tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter ſecabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter Circuli hujus, & angulus *OSP* in ſemicirculo rectus. *Q.E.D.*



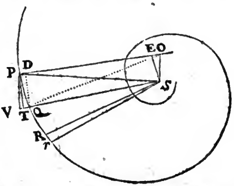
Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, ſeu 2*PO* ad 2*PS*. Item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PO*. Et ex æquo perturbate *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PS*. Unde fit *PQq* æquale *TQ*×2*PS*. *Q.E.D.*

PROPO-

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis: dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur SQ ad V, ut ſit SV æqualis SP. Tempore quovis, in Medio reſiſtente, deſcribat corpus arcum quam minimum PQ, & tempore duplo arcum quam minimum PR; & decrementa horum arcuum ex reſiſtentia oriunda, ſive defectus ab arcubus qui in Medio non reſiſtente iiſdem temporibus deſcriberentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Eſt itaque decrementum arcus PQ pars quarta decrementi arcus PR. Unde etiam, ſi areæ PSQ æqualis capiatur area QSr, erit decrementum arcus PQ æquale dimidio lineolæ Rr; adeoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}Rr$ & TQ quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P, eſt reciproce ut SPq, & (per Lem. x. Lib. I,) lineola TQ, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ deſcribitur, (Nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$ id eſt (per Lemma noviſſimum) $\frac{1}{2}PQq \times SP$, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus eſt ut $PQ \times \surd SP$; & corporis velocitas, qua arcus PQ illo tempore deſcribitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \surd SP}$ ſeu $\frac{1}{\surd SP}$, hoc eſt, in ſubduplicata ratione ipſius SP reciproce. Et ſimili argumento, velocitas qua arcus QR deſcribitur, eſt in ſubduplicata



Digitized by Google

duplicata ratione ipſius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt, in ſubduplicata ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad $\surd SP \times SQ$; & ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \surd SP \times SQ$, ſeu $\frac{1}{2}VQ$; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \surd SP \times SQ$ ad $\frac{1}{2}VQ$ ſit æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ, ex reſiſtentia oriundum, ſive hujus duplum Rr, eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ ſive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob ſimilia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Eſt igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut reſiſtentia, id eſt, in ratione denſitatis Medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit Medii denſitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem OS ad OP, denſitas Medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In Medio igitur cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia a centro SP, corpus gyrari poteſt in hac Spirali. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea ſemper eſt quacum corpus in Medio non reſiſtente gyrari poteſt in Circulo, ad eandem a centro diſtantiam SP.

Corol. 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{OS}{OP}$, ſin diſtantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii denſitatem aptari poteſt.

Corol. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis P, eſt ad vim centripetam

Digitized by Google

tam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad OP. Nam vires illæ ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & TQ ſive ut $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQq}{SP}$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}VQ$ & PQ, ſeu $\frac{1}{2}OS$ & OP. Data igitur Spirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & viceverſa ex data illa proportione datur Spiralis.

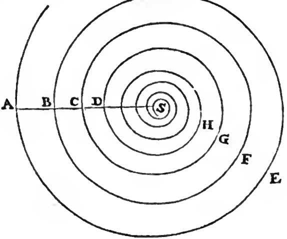
Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac Spirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum, ea cum velocitate quæ ſit ad velocitatem qua probavimus in ſuperioribus in caſu Parabolæ (Theor. x, Lib. I,) deſcenſum in Medio non reſiſtente fieri, in ſubduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora deſcenſus hic erunt reciproce ut velocitates, atque adeo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro diſtantiis velocitas eadem eſt in Spirali PQR atque in recta SP, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in data ratione, nempe in ratione OP ad OS; tempus deſcenſus in Spirali erit ad tempus deſcenſus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo Circuli; & manentibus hiſce Circulis, mutetur utcunque angulus quem Spiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum quas corpus intra Circulorum circumferentias, pergendo in Spirali a circumferentia ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut $\frac{PS}{OS}$, ſive ut Tangens anguli illius quem Spiralis continet cum radio PS; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut Secans anguli ejuſdem, vel etiam reciproce ut Medii denſitas.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia locorum a centro, revolutionem in Curva quacunque AEB circa centrum illud fecerit, & Radium primum AS in eodem angulo ſecuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in A reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum a centro (id eſt, ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones BFC, CGD &c. facere, & interſectionibus

ſtionibus diſtinguet Radium AS in partes AS, BS, CS, DS, &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut



perimetri Orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directe, & velocitates in principiis A, B, C, inverſe; id eſt, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut ſumma omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id eſt, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, ſive ut $\frac{2}{3}AS$ ad AB quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro S, intervallis continue proportionalibus SA, SB, SC, &c. deſcribe Circulos quotcunque, & ſtatue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his Circulis, in Medio de quo egimus, eſſe ad tempus revolutionum inter eoſdem in Medio propoſito, ut Medii propoſiti denſitas mediocris inter hos Circulos ad Medii, de quo egimus, denſitatem mediocrem inter eoſdem quam proxime: Sed & in eadem quoque ratione eſſe Secantem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, ſecat radium AS, ad Secantem anguli

 quo

Digitized by Google

 quo Spiralis nova ſecat radium eundem in Medio propoſito: Atque etiam ut ſunt eorundem angulorum Tangentes ita eſſe numeros revolutionum omnium inter Circulos eoſdem duos quam proxime. Si hæc fiant paſſim inter Circulos binos, continuabitur motus per Circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari poſſimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali ſuperius deſcripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi Spiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Demonſtratur eadem methodo cum Propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciproce ut diſtantiæ SP dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index eſt $n+1$; colligetur ut ſupra, quod tempus quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & reſiſtentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^{n}}$, ſive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^{n} \times SQ}$, adeoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc eſt, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciproce ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas ſit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in P erit reciproce ut SP.

Corol. 1. Reſiſtentia eſt ad vim centripetam, ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP.

Corol. 2. Si vis centripeta ſit reciproce ut $SPcub$, erit $1-\frac{1}{2}n=0$; adeoque reſiſtentia & denſitas Medii nulla erit, ut in Propoſitione nona Libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta ſit reciproce ut dignitas aliqua radii SP cujus index eſt major numero 3, reſiſtentia affirmativa in negativam mutabitur.

Scho-

Digitized by Google

Scholium.

Cæterum hæc Propoſitio & ſuperiores, quæ ad Media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major denſitas quam ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in Mediis quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire & vim centripetam & Medii reſiſtentiam qua corpus in data Spirali, data velocitatis Lege, revolvi poteſt.

Sit Spiralis illa PQR. Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum PQ dabitur tempus, & ex altitudine TQ, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR, differentia RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac denſitas Medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Data Lege vis centripetæ, invenire Medii denſitatem in locis ſingulis, qua corpus datam Spiralem deſcribet.

Ex vi centripeta invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii denſitas: ut in Propoſitione ſuperiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propoſitione decima, & Lemmate ſecundo; & Lectorem in hujuſmodi perplexis diſquiſitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam ſunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque denſitate & reſiſtentia Mediorum, in quibus motus hactenus expoſiti & his affines peraguntur.

Digitized by Google

SECTIO V.

De Denſitate & Compreſſione Fluidorum, deque Hydroſtatica.

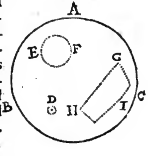
Definitio Fluidi.

Fluidum eſt corpus omne cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter ſe.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſita condenſationis, gravitatis & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & abſque omni motu a preſſione illa orto permanent in locis ſuis.

Caſ. 1. In vaſe ſphærico *ABC* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejuſdem pars nulla ex illa preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes, ad eandem a centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc adeo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui a preſſione illa oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra Hypotheſin. Non poſſunt longius ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra Hypotheſin. Non poſſunt ſervata ſua a centro diſtantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars



pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique: ſit enim *EF* pars ſphærica fluidi, & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per Caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebunt in locis ſuis, per Caſum eundum primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis, per definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falſo dicebatur quod Sphæra *EF* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Dico præterea quod diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed &, per Caſum ſecundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt a partibus Sphæricis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas Sphæricas æqualiter premunt, per Caſum 3. & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per Motus Legem tertiam. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuo æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt quod Fluidi cujuſcunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuo premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur ſi Fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem preſſioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido Fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quam ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis preſſa recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, abſque motu locali: & ſubinde partes fluidi, per Caſum quintum, ſe mutuo prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

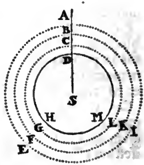
Corol.

Digitized by Google

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externa ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſius vel remiſſius ſeſe premendo difficilius vel facilius labuntur inter ſe.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro diſtantiis homogenei, fundo Sphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus Cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.



Sit *DHM* ſuperficies fundi, & *AEI* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *BFK*, *CGL* diſtinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem Orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *AE* vi ſimplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis ſupremi partes & ſuperficies ſecunda *BFK* (per Prop. XIX.) pro menſura ſua æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit preſſionem duplam. Hac preſſione, pro menſura ſua, & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt preſſione tripla, urgetur ſuperficies tertia *CGL*. Et ſimiliter preſſione quadrupla urgetur ſuperficies quarta, quintupla quinta, & ſic deinceps. Preſſio igitur qua ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus Orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc eſt, gravitati ſolidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum, (ſi modo Orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis a ſuperficie infima ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus Cylindri præfi-

præfiniti. *Q. E. D.* Et ſimili argumentatione patet Propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quavis aſſignata diſtantiæ a centro, ut & ubi Fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata ſuſtentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; ſive fluidum, a ſuperficie preſſa ſurſum continuatum, ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit oblique per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maxime irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem Theorematis hujus ad Caſus ſingulos Fluidorum.

Corol. 3. Eadem Demonſtratione colligitur etiam (per Prop. XIX) quod fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe, ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet vel deſcenderet vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui, per Caſ. 5. Prop. XIX, jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecifice gravius eſt quam Fluidum ſibi contiguum ſubſidebit, & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, alias in æquili-

Digitized by Google

æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt Gravitas: altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota qua corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis Gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in Aere ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt, non vere, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ vel ab ea ſuperatur. Quæ vero nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aqua. Nam ſimilis eſt horum Caſuum Demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus Propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum Figuras externas, patet inſuper, per Corollarium

Prop.

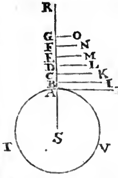
Digitized by Google

Prop. XIX, quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi Animalia immergantur, & ſenſatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora a compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum Syſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent gravitatem ſuam comparativam, niſi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta diſtantiis ſuis a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continue proportionales, denſitates Fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continue proportionales.

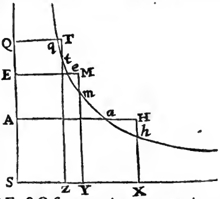
Deſignet ATV fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, $S\mathcal{D}$, SE, &c. diſtantias continue proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, $\mathcal{D}L$, EM, *&c.* quæ ſint ut denſitates Medii in locis A, B, C, $\mathcal{D}$, E; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{C\mathcal{D}}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, a B ad C, a C ad $\mathcal{D}$, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, $\mathcal{D}$, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, $C\mathcal{D}$, &c. conficient preſſiones AH, BI, CK, quibus fundum ATV (juxta Theorema XV.) urgetur. Suſtinet ergo particula A preſſiones omnes AH, BI, CK, $\mathcal{D}L$, pergendo in infinitum; & particula B preſſiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & ſic deinceps: adeoque particulæ primæ A denſitas AH eſt ad particulæ ſecundæ B denſitatem



Digitized by Google

tatem BI ut ſumma omnium $AH+BI+CK+\mathcal{D}L$, in infinitum, ad ſummam omnium $BI+CK+\mathcal{D}L$, &c. Et BI denſitas ſecundæ B, eſt ad CK denſitatem tertiæ C, ut ſumma omnium $BI+CK+\mathcal{D}L$, &c. ad ſummam omnium $CK+\mathcal{D}L$, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis AH, BI, CK, &c. proportionales, atque adeo continue proportionales, per hujus Lem. 1. proindeque differentiæ AH, BI, CK, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continue proportionales. Quare cum denſitates in locis A, B, C, &c. ſint ut AH, BI, CK, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per ſaltum, & (ex æquo) in diſtantiis SA, SC, SE continue proportionalibus, erunt denſitates AH, CK, EM continue proportionales. Et eodem argumento, in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus SA, $S\mathcal{D}$, SG, denſitates AH, $\mathcal{D}L$, GO erunt continue proportionales. Coeant jam puncta A, B, C, $\mathcal{D}$, E, &c. eo ut progreſſio gravitatum ſpecificarum a fundo A ad ſummitatem Fluidi continua reddatur, & in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus SA, $S\mathcal{D}$, SG, denſitates AH, $\mathcal{D}L$, GO, ſemper exiſtentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi detur denſitas Fluidi in duobus locis, puta A & E, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco Q. Centro S, Aſymptotis rectangulis SQ, SX, deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula AH, EM, QT in a, e, q, ut & perpendicula HX, MY, TZ, ad Aſymptoton SX demiſſa, in h, m & t. Fiat area $ZYmtZ$ ad aream datam $YmhX$ ut area data $EeqQ$ ad aream datam $EeaA$; & linea Zt producta abſcindet lineam QT denſitati proportionalem.



Namque ſi lineæ SA, SE, SQ ſunt continue proportionales, erunt areæ $EeqQ$, $EeaA$ æquales, & inde areæ his proportionales $YmtZ$, $XhmY$ etiam æquales, & lineæ SX, SY, SZ, id eſt AH, EM, QT continue proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ SA, SE, SQ obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continue proportionalium, lineæ AH, EM, QT, ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia ſerie quantitatum continue proportionalium.

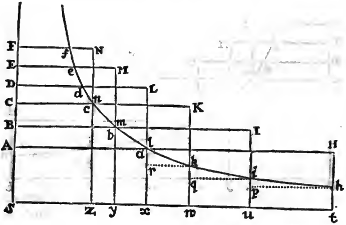
PROPO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione Muſica, denſitates Fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione Geometrica.

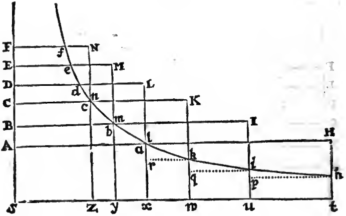
Deſignet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* diſtantias in progreſſione Geometrica. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. quæ ſint ut Fluidi denſitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. & ipſius



gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab *A* ad *B*, ſecundam a *B* ad *C*, tertiam a *C* ad *D*, &c. Et hæ ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias *SA*, *SB*, *SC*, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes preſſionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum denſitates ſint ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum $AH-BI$, $BI-CK$, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c.

 Centro

Centro *S*, Aſymptotis *SA*, *Sx*, deſcribatur Hyperbola quævis, quæ ſecet perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. in *a*, *b*, *c*, &c. ut & perpendicula ad Aſymptoton *Sx* demiſſa *Ht*, *Iu*, *Kw* in *h*, *i*, *k*; & denſitatum differentiæ *tu*, *uw*, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. ſeu *tp*, *uq*, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id eſt, ut *Aa*, *Bb*, &c. Eſt enim, ex natura Hyperbolæ, *SA* ad *AH* vel *St*, ut *th* ad *Aa*, adeoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale *Aa*.



Et ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale *Bb*, &c. Sunt autem *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. continue proportionales, & propterea differentiis ſuis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula *tp*, *uq*, &c. ut & ſummis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ ſummæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejuſmodi termini quam plurimi, & ſumma omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta *zthn*, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum *A*, *B*, *C*, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ *zthn*, adeoque huic areæ proportionalis eſt differentia $Aa - Ff$. Sumantur

Digitized by Google

tur jam diſtantiæ quælibet, puta SA, $S\mathcal{D}$, SF in progreſſione Muſica, & differentiæ $Aa - \mathcal{D}d$, $\mathcal{D}d - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ $tblx$, $xlnz$ æquales erunt inter ſe, & denſitates St, Sx, Sz, id eſt, AH, $\mathcal{D}L$, FN, continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi dentur Fluidi denſitates duæ quævis, puta AH & CK, dabitur area $thkw$ harum differentiæ tw reſpondens; & inde invenietur denſitas FN in altitudine quacunque SF, ſumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thkw$ ut eſt differentia $Aa - Ff$ ad differentiam $Aa - Cc$.

Scholium.

Simili argumentatione probari poteſt, quod ſi gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione diſtantiarum a centro; & quadratorum diſtantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\,cub.}{SAq}$, $\frac{SA\,cub.}{SBq}$, $\frac{SA\,cub.}{SCq}$) ſumantur in progreſſione Arithmetica; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometrica. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicata ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\,cub}$, $\frac{SAqq}{SB\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\,cub.}$, &c.) ſumantur in progreſſione Arithmetica; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometrica. Et ſic in infinitum. Rurſus ſi gravitas particularum Fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione Arithmetica, denſitates erunt in progreſſione Geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſſione Arithmetica, denſitates erunt in progreſſione Geometrica. Et ſic in infinitum. Hæc ita ſe habent ubi Fluidi compreſſione condenſati denſitas eſt ut vis compreſſionis, vel, quod perinde eſt, ſpatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi poſſunt aliæ condenſationis Leges, ut quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi denſitatis. Quo in caſu, ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro, denſitas erit reciproce ut cubus diſtantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ, denſitas erit reciproce in ſeſquiplicata ratione

tione

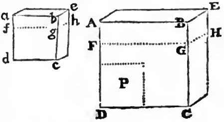
Digitized by Google

De Motu Corporum tione diſtantiæ. Fingatur quod vis comprimens ſit in duplicata ratione denſitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata diſtantiæ, & denſitas erit reciproce ut diſtantia. Caſus omnes percurrere longum eſſet.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si Fluidi ex particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum. Et vice verſa, particulæ viribus quæ ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt Fluidum Elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis.

Includi intelligatur Fluidum in ſpatio cubico *ACE*, dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *ace*; & particularum, ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio obtinentium, diſtantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & Medii denſitates reciproce ut ſpatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri cubi minoris *db*; & ex Hypotheſi, preſſio qua quadratum *DP* urget Fluidum incluſum, erit ad preſſionem qua latus illud quadratum *db* urget Fluidum incluſum ut Medii denſitates ad invicem, hoc eſt, ut *ab cub.* ad *AB cub.* Sed preſſio qua quadratum *DB* urget Fluidum incluſum, eſt ad preſſionem qua quadratum *DP* urget idem Fluidum, ut quadratum *DB* ad quadratum *DP*, hoc eſt, ut *AB quad.* ad *ab quad.* Ergo, ex æquo, preſſio qua latus *DB* urget Fluidum, eſt ad preſſionem qua latus *db* urget Fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgh*, per media cuborum ductis, diſtinguatur Fluidum in duas partes, & hæ ſe mutuo prement iiſdem viribus, quibus premuntur a planis *AC*, *ac*, hoc eſt, in proportione *ab* ad *AB*: adeoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones ſuſtinentur, ſunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemque ſitum in utroque cubo, vires quas particulæ omnes ſecundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes,



Digitized by Google

nes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *FGH* in cubo majore, ſunt ad vires quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *fgh* in cubo minore ut *ab* ad *AB*, hoc eſt, reciproce ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice verſa, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciproce ut diſtantiæ, id eſt, reciproce ut cuborum latera *AB*, *ab*; ſummæ virium erunt in eadem ratione, & preſſiones laterum *DB*, *db* ut ſummæ virium; & preſſio quadrati *DP* ad preſſionem lateris *DB* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et, ex æquo, preſſio quadrati *DP* ad preſſionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id eſt, vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciproce in duplicata ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitarum. Si vires centrifugæ ſint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantia, & E pro denſitate Fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciproce ut diſtantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum Virtus attractiva terminatur fere in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur Fluida de quibus actum eſt in hac Propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris quantitatis Fluidi. An vero Fluida Elaſtica ex particulis ſe mutuo fugantibus conſtent, Quæſtio Phyſica eſt. Nos proprietatem Fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium Mathematice demonſtravimus, ut Philoſophis anſam præbeamus Quæſtionem illam tractandi.

SECTIO

Digitized by Google

SECTIO VI.

De Motu & Reſiſtentia Corporum Funependulorum.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum a centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oſcillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directe, & materia inverſe. Quo major eſt vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem ſecundam manifeſtum eſt. Jam vero ſi Pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes correſpondentes ſint ut tempora oſcillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oſcillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce ſunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce ſunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices & quadrata temporum, id eſt, ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera ſunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol.

Digitized by Google

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, ſint ut longitudines pendulorum; ſi & tempora & quantitates materiæ æqualia ſunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

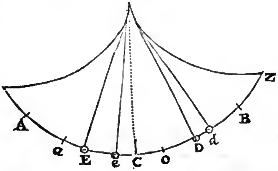
Corol. 5. Et univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverſe.

Corol. 6. Sed & in Medio non reſiſtente quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverſe. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut ſupra explicui; adeoque idem præſtat in tali Medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis; tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

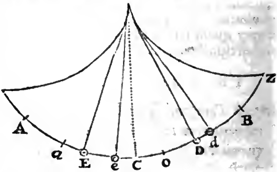
PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora Funependula quibus, in Medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora Funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.



Sit *AB* Cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in Medio non reſiſtente oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in *C*, ita ut *C* ſit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut longitudo arcus *CD* vel *Cd* vel *CE*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur

tur eadem per datam arcus Cycloidis partem *CO*, & ſumatur arcus *Od* in ratione ad arcum *CD* quam habet arcus *OB* ad arcum *CB*: & vis qua corpus in *d* urgetur in Medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis *Cd* ſupra reſiſtentiam *CO*, exponetur per arcum *Od*, adeoque erit ad vim qua corpus *D* urgetur in Medio non reſiſtente, in loco *D*, ut arcus *Od* ad arcum *CD*; & propterea etiam in loco *B* ut arcus *OB* ad arcum *CB*. Proinde ſi corpora duo, *D*, *d* exeant de loco *B*, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus *CB* & *OB*, erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eadem ratione. Sunto arcus illi *BD* & *Bd*, & arcus reliqui *CD*, *Od* erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipſis *CD*, *Od* proportionales, manebunt in eadem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *Od* ſemper erunt ut arcus toti *CB*, *OB*, & propterea arcus illi reliqui ſimul deſcribentur. Quare corpora duo *D*, *d* ſimul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in Medio non reſiſtente ad locum *C*, &



alterum in Medio reſiſtente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* ſint ut arcus *CB*, *OB*; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in eadem ratione. Sunto illi *CE* & *Oe*. Vis qua corpus *D* in Medio non reſiſtente retardatur in *E* eſt ut *CE*, & vis qua corpus *d* in Medio reſiſtente retardatur in *e* eſt ut ſumma vis *Ce* & reſiſtentiæ *CO*, id eſt ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates, in data illa ratione retardatæ, manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in data illa ratione arcuum *CB* & *OB*; & propterea ſi ſumantur arcus toti *AB*, *aB* in eadem ratione, corpora *D*, *d* ſimul deſcribent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *Ba* proportionales ſunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ ſimul deſcribuntur. *Q.E.D.*

Corol.

Digitized by Google

Corol. Igitur motus velociſſimus in Medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *aB* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo a *B* ad *O*.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum Funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloide ſunt Iſochronæ.

Nam ſi corpora duo, a centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti: reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si Corporibus Funependulis reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in Medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A, B; & reſiſtentia corporis in arcu A, erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus B, in duplicata ratione velocitatum, id eſt, ut AA ad BB, quam proxime. Si reſi-

ſtentia in arcu B eſſet ad reſiſtentiam in arcu A ut A B ad A A; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per Propoſitionem ſuperiorem. Idcoque reſiſtentia A A in arcu A, vel A B in arcu B, efficit exceſſum temporis in arcu A ſupra tempus in Medio non reſiſtente; & reſiſtentia B B efficit exceſſum temporis in arcu B ſupra tempus in Medio non reſiſtente. Sunt autem exceſſus illi ut vires efficientes A B & B B quam proxime, id eſt, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oſcillationum temporibus, in Medio reſiſtente, in arcubus inæqualibus factarum, cognoſci poſſunt tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente. Nam differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in Medio non reſiſtente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oſcillationes breviores ſunt magis Iſochronæ, & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in Medio non reſiſtente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, temra ſunt paulo majora, propterea quod reſiſtentia in deſcenſu corporis qua tempus producitur, major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quam reſiſtentia in aſcenſu ſubſequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corporibus tardeſcentibus paulo minus reſiſtitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore caſu magis agitatur, in poſteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conſpirat. Pendulis igitur in deſcenſu magis reſiſtit, in aſcenſu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque cauſa tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si Corpori Funependulo in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus arcus deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

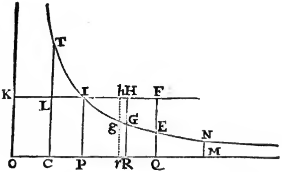
Deſignet *BC* arcum deſcenſu deſcriptum, *Ca* arcum aſcenſu deſcriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & ſtantibus quæ in Propoſitione

ſitione xxv conſtructa & demonſtrata ſunt, erit vis qua corpus oſcillans urgetur in loco quovis $\mathcal{D}$, ad vim reſiſtentiæ ut arcus $C\mathcal{D}$ ad arcum CO, qui ſemiſſis eſt differentiæ illius Aa. Ideoque vis qua corpus oſcillans urgetur in Cycloidis principio ſeu puncto altiſſimo, id eſt, vis gravitatis, erit ad reſiſtentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum infimum C ad arcum CO; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, ſeu dupla penduli longitudo, ad arcum Aa. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Poſito quod Corpori in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis: invenire reſiſtentiam in locis ſingulis.

Sit Ba (Fig. Prop. xxv) arcus oſcillatione integra deſcriptus, ſitque C infimum Cycloidis punctum, & CZ ſemiſſis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæratur reſiſtentia cor-



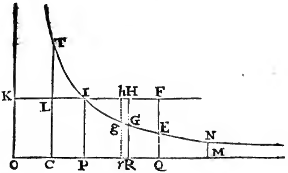
poris in loco quovis $\mathcal{D}$. Secetur recta infinita $O\mathcal{Q}$ in punctis O, C, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, ea lege, ut (ſi erigantur perpendicula OK, CT, $\mathcal{P}I$, $\mathcal{Q}E$, centroque O & Aſymptotis OK, $O\mathcal{Q}$ deſcribatur Hyperbola $TIGE$ ſecans perpendicula CT, $\mathcal{P}I$, $\mathcal{Q}E$ in T, I & E, & per punctum I agatur KF parallela Aſymptoto $O\mathcal{Q}$ occurrens Aſymptoto OK in K, & perpendiculis CT & $\mathcal{Q}E$ in L & F) fuerit area Hyperbolica $\mathcal{P}IE\mathcal{Q}$ ad aream Hyperbolicam $\mathcal{P}ITC$ ut arcus BC deſcenſu corporis deſcriptus ad arcum Ca aſcenſu deſcriptum, & area IEF ad aream

Digitized by Google

De Motu Corporum

aream ILT ut OQ ad OC. Dein perpendiculo MN abſcindatur area Hyperbolica $PINM$ quæ ſit ad aream Hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus CZ ad arcum BC deſcenſu deſcriptum. Et ſi perpendiculo RG abſcindatur area Hyperbolica $PIGR$, quæ ſit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC deſcenſu toto deſcriptum: erit reſiſtentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ ad aream $PIENM$.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D, a urgetur, ſint ut arcus CZ, CB, CD, Ca, & arcus illi ſint ut areæ $PINM, PIEQ, PIGR, PITC$; exponantur tum arcus tum vires per has areas reſpective. Sit inſuper Dd ſpatium quam minimum a corpore deſcendente deſcriptum, & exponatur idem per aream quam minimam $RGgr$ parallelis RG, rg comprehenſam; & pro-



ducatur rg ad h, ut ſint $GHhg$, & $RGgr$ contemporanea arearum $IGH, PIGR$ decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ incrementum $GHhg-\frac{Rr}{OQ}IEF$, ſeu $Rr\times HG-\frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ ſeu $Rr\times RG$, ut $HG-\frac{IEF}{OQ}$ ad RG; adeoque ut $OR\times HG-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR\times GR$ ſeu $OP\times PI$, hoc eſt (ob æqualia $OR\times HG$, $OR\times HR-OR\times GR$, $ORHK-OPIK$, $PIHR$ & $PIGR+IGH$) ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OPIK$. Igitur ſi area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ dicatur

dicatur Y, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, erit incrementum areæ Y ut *PIGR*−Y.

Quod ſi V deſignet vim a gravitate oriundam, arcui deſcribendo *CD* proportionalem, qua corpus urgetur in *D*: & R pro reſiſtentia ponatur: erit V−R vis tota qua corpus urgetur in *D*. Eſt itaque incrementum velocitatis ut V−R & particula illa temporis in qua factum eſt conjunctim: Sed & velocitas ipſa eſt ut incrementum contemporaneum ſpatii deſcripti directe & particula eadem temporis inverſe. Unde, cum reſiſtentia (per Hypotheſin) ſit ut quadratum velocitatis, incrementum reſiſtentiæ (per Lem. 11) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id eſt, ut momentum ſpatii & V−R conjunctim; atque adeo, ſi momentum ſpatii detur, ut V−R; id eſt, ſi pro vi V ſcribatur ejus exponens *PIGR*, & reſiſtentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut *PIGR*−Z.

Igitur area *PIGR* per datorum momentorum ſubductionem uniformiter decreſcente, creſcunt area Y in ratione *PIGR*−Y, & area Z in ratione *PIGR*−Z. Et propterea ſi areæ Y & Z ſimul incipiant & ſub initio æquales ſint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent eſſe æquales, & æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta & ſemper erunt æquales: id adeo quia ſi reſiſtentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo *Ca*, qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum reſiſtentia ceſſat propius accedente ad punctum *C*, reſiſtentia citius evaneſcet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit deſinitque ubi reſiſtentia nulla eſt, hoc eſt, in principio & fine motus, ubi arcus *CD*, *CD* arcubus *CB* & *Ca* æquantur, adeoque ubi recta *RG* incidit in rectas *QE* & *CT*. Et area Y ſeu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incipit deſinitque ubi nulla eſt, adeoque ubi $\frac{OR}{OQ} IEF$ & *IGH* æqualia ſunt: hoc eſt (per conſtructionem) ubi recta *RG* incidit in rectas *QE* & *CT*. Proindeque areæ illæ ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, & propterea ſemper ſunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ æqualis eſt areæ Z, per quam reſiſtentia exponitur, & propterea eſt ad aream *PINM* per quam gravitas exponitur, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol.

Digitized by Google

Corol. 1. Eſt igitur reſiſtentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ} IEF$ ad aream *PINM*.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* eſt ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in caſu momentum ejus (nimirum *PIGR* − Y) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innoteſcit velocitas in locis ſingulis: quippe quæ eſt in ſubduplicata ratione reſiſtentiæ, & ipſo motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide abſque omni reſiſtentia oſcillantis.

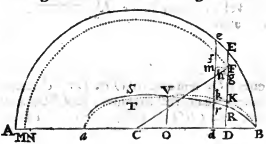
Cæterum ob difficilem calculum quo reſiſtentia & velocitas per hanc Propoſitionem inveniendæ ſunt, viſum eſt Propoſitionem ſequentem ſubjungere, quæ & generalior ſit & ad uſus Philoſophicos abunde ſatis accurata.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta aB *æqualis ſit Cycloidis arcui quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ ſint ad longitudinem Penduli ut reſiſtentia corporis in arcus punctis correſpondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum deſcenſu toto deſcriptum, & arcum aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum, ducta in arcuum eorundem ſemiſummam, æqualis erit areæ* BKaB *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

Exponatur enim tum Cycloidis arcus, oſcillatione integra deſcriptus, per rectam illam ſibi æqualem *aB*, tum arcus qui deſcriberetur in vacuo per longitudinem *AB*. Biſecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræſentabit infimum Cycloidis punctum, & erit *CD* ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in *D* ſecundum tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & ſi in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad longitudinem penduli

penduli quam habet reſiſtentia ad gravitatem, erit *DK* exponens reſiſtentiæ. Centro *C* & intervallo *CA* vel *CB* conſtruatur Semicirculus *BEeA*. Deſcribat autem corpus tempore quam minimo ſpatium *Dd*, & erectis perpendiculis *DE*, *de* circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, deſcendendo a puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc per Prop. LII. Lib. I. Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa *DE*, *de*; ſitque *DF* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in Medio reſiſtente. Et ſi centro *C* & intervallo *CF* deſcribatur Circulus *FfM* occurrens rectis *de* & *AB* in *f* & *M*, erit *M* locus ad quem deinceps abſque ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & *df* velocitas quam acquireret in *d*. Unde etiam ſi *Fg* deſignet velocitatis momentum quod corpus *D*, deſcribendo ſpatium quam minimum *Dd*, ex reſiſtentia Medii amittit; & ſumatur *CN* æqualis *Cg*: erit *N* locus ad quem corpus deinceps abſque ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & *MN* erit decrementum aſcenſus ex velocitatis illius amiſſione oriundum. Ad *df* demittatur perpendiculum *Fm*, & velocitatis *DF* decrementum *Fg* a reſiſtentia *DK* genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum *fm* a vi *CD* genitum, ut vis generans *DK* ad vim generantem *CD*. Sed & ob ſimilia triangula *Fmf*, *Fhg*, *FDC*, eſt *fm* ad *Fm* ſeu *Dd*, ut *CD* ad *DF*; & ex æquo *Fg* ad *Dd* ut *DK* ad *DF*. Item *Fh* ad *Fg* ut *DF* ad *CF*; & ex æquo perturbate, *Fh* ſeu *MN* ad *Dd* ut *DK* ad *CF*

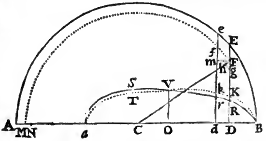


ſeu *CM*; ideoque ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis erit ſummæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile *M* erigi ſemper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ *CM*, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem *Aa*; & trapezium ex illo motu deſcriptum ſive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ æquabitur ſummæ omnium $MN \times CM$, adeoque ſummæ omnium $Dd \times DK$, id eſt, areæ *BKkVTa*. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum *Ca*, *CB* differentia *Aa*, colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia *DK*, Figura *aBKkT* rectangulum erit ſub *Ba* & *DK*; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2}$ *Ba* & *Aa* erit æquale rectangulo ſub *Ba* & *DK*, & *DK* æqualis erit $\frac{1}{2}$ *Aa*. Quare cum *DK* ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}$ *Aa* ad longitudinem Penduli; omnino ut in Prop. XXVIII demonſtratum eſt.

Si reſiſtentia ſit ut velocitas, Figura *aBKkT* Ellipſis erit quam proxime. Nam ſi corpus, in Medio non reſiſtente, oſcillatione integra deſcriberet longitudinem *BA*, velocitas in loco quovis *D* foret ut Circuli diametro *AB* deſcripti ordinatim applicata *DE*. Proinde cum *Ba* in Medio reſiſtente, & *BA* in Medio non reſiſtente, æqualibus circiter temporibus deſcribantur; adeoque velocitates in ſingulis ipſius *Ba* punctis, ſint quam proxime ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis *BA*, ut eſt *Ba* ad *BA*; erit velocitas *DK* in Medio reſiſtente ut Circuli vel Ellipſeos ſuper diametro *Ba* deſcripti



ordinatim applicata; adeoque Figura *BKVTa* Ellipſis, quam proxime. Cum reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit *OV* exponens reſiſtentiæ in puncto Medio *O*; & Ellipſis *aBRVS*, centro *O*, ſemiaxibus *OB*, *OV* deſcripta, Figuram *aBKVT*, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproxime. Eſt igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipſeos hujus ad $OV \times BO$: id eſt, *Aa* ad *OV* ut area ſemicirculi ad quadratum radii, ſive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11}$ *Aa* ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in *O* ad ejuſdem gravitatem.

Quod ſi reſiſtentia *DK* ſit in duplicata ratione velocitatis, Figura *BKVTa* Parabola erit verticem habens *V* & axem *OV*, ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ *Ba* & *OV* quam proxime. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2}$ *Ba* & *Aa* æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ *Ba* & *OV*, adeoque *OV* æqualis $\frac{3}{4}$ *Aa*: & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in *O* ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ *Aa* ad longitudinem Penduli.

Atque has concluſiones in rebus practicis abunde ſatis accuratas eſſe cenſeo. Nam cum Ellipſis vel Parabola *BRVSa* congruat

cum

Digitized by Google

cum Figura *BKVTa* in puncto medio *V*, hæc ſi ad partem alterutram *BRV* vel *VSa* excedit Figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & ſic eidem æquabitur quam proxime.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si Corporis oſcillantis reſiſtentia in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per reſiſtentiam Medii, adeoque eſt ut retardatio tota eique proportionalis reſiſtentia retardans. In ſuperiore Propoſitione rectangulum ſub recta $\frac{1}{2}aB$ & arcuum illorum *CB*, *Ca* differentia *Aa*, æqualis erat areæ *BKT*. Et area illa, ſi maneat longitudo *aB*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *DK*; hoc eſt, in ratione reſiſtentiæ, adeoque eſt ut longitudo *aB* & reſiſtentia conjunctim. Proindeque rectangulum ſub *Aa* & $\frac{1}{2}aB$ eſt ut *aB* & reſiſtentia conjunctim, & propterea *Aa* ut reſiſtentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus deſcriptus: & contra.

Corol. 2. Si reſiſtentia ſit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius: & contra.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi reſiſtentia ſit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et ſi reſiſtentia ſit partim in ratione ſimplici velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata: & contra. Eadem erit lex & ratio reſiſtentiæ pro velocitate, quæ eſt differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque ſi, pendulo inæquales arcus ſucceſſive deſcribente, inveniri poteſt ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus deſcripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ pro velocitate majore vel minore.

Digitized by Google

Scholium Generale.

Ex his Propoſitionibus, per oſcillationes Pendulorum in Mediis quibuſcunque, invenire licet reſiſtentiam Mediorum. Aeris vero reſiſtentiam inveſtigavi per Experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & centrum oſcillationis Globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro ſuſpenſionis diſtans; & e regione puncti illius collocavi Regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus Globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur, ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, reſpective. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ultimo deſcriptos, erat in caſu primo, ſecundo, tertio, quarto, quinto, ſexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 reſpective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum in caſu unoquoque, & in oſcillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 deſcriptus fuit, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti reſpective. Hæ autem in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicata ratione arcuum deſcriptorum quam proxime, in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione; & propterea (per Corol. 2. Prop. XXXI Libri hujus) reſiſtentia Globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione.

Deſignet

Digitized by Google

Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quavis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Cum velocitates maximæ ſint in Cycloide ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcriptorum, in Circulo vero ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ; adeoque paribus arcubus majores ſint in Cycloide quam in Circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in Circulo ſint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore, quamproxime, in utraque Curva: deberent enim differentiæ illæ in Cycloide augeri, una cum reſiſtentia, in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa ſimplici auctam; & diminui, una cum quadrato temporis, in eadem duplicata ratione. Itaque ut reductio fiat ad Cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in Circulo obſervatæ, velocitates vero maximæ ponendæ ſunt arcubus dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem Analyticam, fit $A = 0{,}0000916$, $B = 0{,}0010847$, & $C = 0{,}0029558$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0{,}0000916\,V + 0{,}0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0029558\,V^2$: & propterea cum (per Corollarium Propoſitionis xxx) reſiſtentia Globi in medio arcus oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{16}{23}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem Penduli; ſi pro A, B & C ſcribantur numeri inventi, fiet reſiſtentia Globi ad ejus pondus, ut $0{,}0000583\,V + 0{,}0007546\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0022169\,V^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum ſuſpenſionis & Regulam, id eſt, ad 121 digitos. Unde cum V in caſu ſecundo deſignet 1, in quarto 4, in ſexto 16: erit reſiſtentia ad pondus Globi in caſu ſecundo ut 0,0030298 ad 121, in quarto ut 0,0417402 ad 121, in ſexto ut 0,61675 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in caſu ſexto deſcripſit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ſeu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius eſſet 121 digitorum, & longitudo Penduli inter punctum ſuſpenſionis

&c

& centrum Globi eſſet 126 digitorum, arcus quem centrum Globi deſcripſit erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oſcillantis velocitas maxima, ob reſiſtentiam Aeris, non incidit in punctum infimum arcus deſcripti, ſed in medio fere loco arcus totius verſatur: hæc eadem erit circiter ac ſi Globus deſcenſu ſuo toto in Medio non reſiſtente deſcriberet arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in Cycloide, ad quam motum Penduli ſupra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem arcus illius ſinui verſo æqualem, acquirere poſſet. Eſt autem ſinus ille verſus in Cycloide ad arcum iſtum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278. Quare velocitas ea ipſa eſt quam corpus cadendo & caſu ſuo ſpatium 15,278 digitorum deſcribendo acquirere poſſet. Tali igitur cum velocitate Globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad ejus pondus ut 0,61675 ad 121, vel (ſi reſiſtentiæ pars illa ſola ſpectetur quæ eſt in velocitatis ratione duplicata) ut 0,56752 ad 121.

Experimento autem Hydroſtatico inveni quod pondus Globi hujus lignei eſſet ad pondus Globi aquei magnitudinis ejuſdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 ſit ad 213,4 in eadem ratione, erit reſiſtentia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipſius pondus, ut 0,56752 ad 213,4 id eſt, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata deſcribat longitudinem digitorum 30,556, velocitatem illam omnem in Globo cadente generare poſſet; manifeſtum eſt quod vis reſiſtentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc eſt, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem ſemidiametri ſuæ, ſeu digitorum $3\frac{7}{16}$, deſcribere poſſet, eodem amitteret motus ſui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oſcillationes quibus Pendulum quartam motus ſui partem amiſit. In ſequente Tabula numeri ſupremi denotant longitudinem arcus deſcenſu primo deſcripti, in digitis & partibus digiti expreſſam: numeri medii ſignificant longitudinem arcus aſcenſu ultimo deſcripti; & loco infimo ſtant numeri oſcillationum. Experimentum deſcripſi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Deſcen-

Digitized by Google

Deſcenſus primus	2	4	8	16	32	64	
Aſcenſus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48	
Numerus Oſcillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$	

Poſtea Globum plumbeum, diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$, ſuſpendi filo eodem, ſic ut inter centrum Globi & punctum ſuſpenſionis intervallum eſſet pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oſcillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum ſubſequentium prior exhibet numerum oſcillationum quibus pars octava motus totius ceſſavit; ſecunda numerum oſcillationum quibus ejuſdem pars quarta amiſſa fuit.

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oſcillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabula priore ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam & ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpective, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione tertia $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quinta $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in ſeptima $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ vero æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Et inde prodit reſiſtentia Globi cum velocitate V moti, in ea ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009\,V + 0{,}000207\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659\,V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus Globi ut $0{,}000659\,V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{2}{22}$, ut $0{,}002217\,V^2$ ad 121: & inde fit reſiſtentia Globi lignei ad reſiſtentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{2}{22}$ in $0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4}$ in $0{,}000659$, id eſt, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproxime. Ergo reſiſtentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum conſideravimus reſiſtentiam

ſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa reſiſtentia ſubduci debet. Hanc accurate definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod reſiſtentiæ Globorum, dempta fili reſiſtentia, ſunt quam proxime in duplicata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$ ad $1-\frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longe abeſt a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in Globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu a nodo deſcriptus, 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus, 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus, 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri a nodo deſcriptus, ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri a centro Globi deſcriptum: & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oſcillationis augeretur & velocitas penduli diminueretur in ratione illa ſubduplicata, maneret vero arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0,4475. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia iſta 0,4475 augeretur in duplicata illa ratione, adeoque evaderet 1,5295. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia Penduli eſſet in duplicata ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1,5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318,136. Rurſus ubi pendulum ſuperius ex Globo ligneo conſtructum, centro oſcillationis, quod a puncto ſuſpenſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49,396. Duxi autem differentias haſce in pondera Globorum ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur

untur

untur ex reſiſtentiis, ſuntque ut reſiſtentiæ directe & pondera inverſe. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 318,136 & 49,396. Pars autem reſiſtentiæ Globi minoris, quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam, ut 0,56752 ad 0,61675, id eſt, ut 45,453 ad 49,396; & pars reſiſtentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti; adeoque partes illæ ſunt ut 318,136 & 45,453 quamproxime, id eſt, ut 7 & 1. Sunt autem Globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt, ut Globorum reſiſtentiæ 7 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major eſt quam quæ ex fili reſiſtentia oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt, paribus Globis, ut quadrata velocitatum; ſunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum Globorum.

Cæterum Globorum, quibus uſus ſum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quaſdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minime ſollicitus. Optarim itaque (cum demonſtratio Vacui ex his dependeat) ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi ſumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo reſiſtentias diverſorum Fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum, movebatur ut in Tabula ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli a puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus deſcenſu primo a puncto in filo notato deſcriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amiſſo proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oſcillationum in aere	$85\frac{1}{2}$		287	535					

Pp In

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oſcillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aqua amiſſi ſunt. Erant quidem oſcillationes in aere paulo celeriores quam in aqua. At ſi oſcillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oſcillationum $1\frac{1}{5}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob reſiſtentiam auctam & ſimul quadratum temporis diminutum in eadem ratione illa duplicata. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oſcillationibus 535 & in aqua oſcillationibus $1\frac{1}{5}$ amiſſi ſunt; ideoque reſiſtentia penduli in aqua eſt ad ejus reſiſtentiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc eſt proportio reſiſtentiarum totarum in caſu columnæ quartæ.

Deſignet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum a Globo, in Aere cum velocitate maxima V moto; & cum velocitas maxima, in caſu columnæ quartæ, ſit ad velocitatem maximam in caſu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum, in caſu columnæ quartæ, ad differentiam in caſu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, ſeu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: ſcribamus in his caſibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ ſeu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{3}{14}$ & $A = 21\frac{2}{7}$: atque adeo reſiſtentia, cum ſit ut $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Quare in caſu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, reſiſtentia tota eſt ad partem ſuam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ ſeu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco reſiſtentia penduli in aqua eſt ad reſiſtentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis eſt, quæque ſola in motibus velocioribus conſideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id eſt, ut 571 ad 1. Si penduli in aqua oſcillantis filum totum fuiſſet immerſum, reſiſtentia ejus fuiſſet adhuc major; adeo ut penduli in aere oſcillantis reſiſtentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt, quæque ſola in corporibus velocioribus conſideranda venit, ſit ad reſiſtentiam ejuſdem penduli totius, eadem cum velocitate, in aqua oſcillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc eſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo ſumi quoque deberet pars illa reſiſtentiæ penduli in aqua, quæ eſſet ut quadratum velocitatis, ſed (quod mirum forte videatur) reſiſtentia in aqua augebatur in ratione velocitatis pluſ-

pluſquam duplicata. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc incidi, quod Arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ anguſtia ſua nimis impediebat. Nam ſi Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; reſiſtentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Id tentabam conſtruendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in aqua, ſuperior & major proxime ſupra aquam filo affixus eſſet, & in Aere oſcillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo inſtituta ſe habebant ut in Tabula ſequente deſcribitur.

Arcus deſcenſu primo deſcriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Arcuum diff. motui amiſſo proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum	$3\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo reſiſtentias Mediorum inter ſe, effeci etiam ut pendula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quaſi trium, & diameter Globi penduli quaſi tertia pars digiti. Ad filum autem proxime ſupra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus ſatis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque ſucceſſive oſcillante, invenirem proportionem reſiſtentiarum: & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſtentiam aquæ, ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt, ut denſitas argenti vivi ad denſitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat reſiſtentia argenti vivi in ea ratione ad reſiſtentiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quod in his ultimis Vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine Globi immerſi. Ampliato Globo, deberet etiam Vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam tam calidis quam frigidis repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum celeriter motorum denſitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem eſſe quam proxime. Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora, pari denſitate, procul-

dubio

Digitized by Google

dubio magis reſiſtunt quam liquidiora, ut Oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus Vini. Verum in liquoribus qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in Aere, in Aqua ſeu dulci ſeu ſalſa, in Spiritibus Vini, Terebinthi & Salium, in Oleo a fæcibus per deſtillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & ſiqui ſint alii, qui tam fluidi ſunt ut in vaſis agitati motum impreſſum diutius conſervent, effuſique liberrime in guttas decurrendo reſolvantur, nullus dubito quin regula allata ſatis accurate obtineat: præſertim ſi experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis inſtituantur.

Denique cum receptiſſima Philoſophorum ætatis hujus opinio ſit, Medium quoddam æthereum & longe ſubtiliſſimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente reſiſtentia oriri debeat: ut tentarem an reſiſtentia, quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externa ſuperficie, an vero partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo ſatis firmo, mediante annulo chalybeo, ſuſpendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad conſtituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus ſurſum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu ſuo ſuperiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita conſtitutum deducebam a perpendiculo ad diſtantiam quaſi pedum ſex, idque ſecundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oſcillante pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demiſſo notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpius, ut loca illa quam potui accuratiſſime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tenſum dimidio ponderis ſui pendulum a perpendiculo digreſſum ſemper urget.) Huic ponderi addebam pondus Aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum

Digitized by Google

tallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret, totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo quod reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſtentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſita pyxidis vacuæ, motum ſuum oſcillatorium tanto diutius conſervare deberet, atque adeo completis ſemper oſcillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externa, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur: erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota $A+B$ erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam $A+78B$ ut 77 ad 78, & diviſim $A+B$ ad $77B$, ut 77 ad 1, indeque $A+B$ ad B ut 77×77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejuſdem reſiſtentia in externa ſuperficie, & amplius. Sic vero diſputamus ex Hypotheſi quod major illa reſiſtentia pyxidis plenæ, non ab alia aliqua cauſa latente oriatur, ſed ab actione ſola Fluidi alicujus ſubtilis in metallum incluſum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulſus ſum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citius retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oſcillationibus obſequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſupra deſcripſimus.

SECTIO

SECTIO VII.

De Motu Fluidorum & Reſiſtentia Projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si Corporum Syſtemata duo ſimilia ex æquali particularum numero conſtent, & particulæ correſpondentes ſimiles ſint & proportionales, ſingulæ in uno Syſtemate ſingulis in altero, & ſimiliter ſitæ inter ſe, ac datam habeant rationem denſitatis ad invicem, & inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, (eæ inter ſe quæ in uno ſunt Syſtemate & eæ inter ſe quæ ſunt in altero) & ſi non tangant ſe mutuo quæ in eodem ſunt Syſtemate, niſi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugent ſe mutuo, niſi viribus acceleratricibus quæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſe & quadrata velocitatum directe: dico quod Syſtematum particulæ illæ pergent inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri.

Corpora ſimilia & ſimiliter ſita temporibus proportionalibus inter ſe ſimiliter moveri dico, quorum ſitus ad invicem in fine temporum illorum ſemper ſunt ſimiles: puta ſi particulæ unius Syſtematis cum alterius particulis correſpondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus ſimiles & proportionales Figurarum ſimilium partes a particulis correſpondentibus deſcribuntur. Igitur ſi duo ſint ejuſmodi Syſtemata, particulæ correſpondentes, ob ſimilitudinem incæptorum motuum, pergent ſimiliter moveri uſque donec ſibi mutuo occurrant. Nam ſi nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. I. Si viribus aliquibus ſe mutuo agitant, & vires illæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſe & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum ſitus ſunt ſimiles & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correſpondentes agitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per Legum Corollarium ſecun-

ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. Hæc ita ſe habebunt per Corol. 1, & 8 Prop. IV, Lib. I. ſi modo centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter Syſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque ad occurſus ſuos primos, & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe donec iterum in ſe mutuo inciderint, & ſic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad Syſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum Syſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſi ſimiles & ſimiliter poſitæ Syſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuo in utroque Syſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas ſimili cum motu utcunque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis Syſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque adeo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iiſdem poſitis, dico quod Syſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum ſuarum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis partium Syſtematum.

Nam reſiſtentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ Syſtematum ſe mutuo agitant, partim ex occurſibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris

Prioris autem generis reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id eſt, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus; hoc eſt (per Hypotheſin) ut quadrata velocitatum directe & diſtantiæ particularum correſpondentium inverſe & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus directe: ideoque (cum diſtantiæ particularum Syſtematis unius ſint ad diſtantias correſpondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in Syſtemate priore ad diametrum particulæ vel partis correſpondentis in altero, & quantitates materiæ ſint ut denſitates partium & cubi diametrorum) reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium Syſtematum. *Q. E. D.* Poſterioris generis reſiſtentiæ ſunt ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directe, & ſpatia inter earum reflexiones inverſe. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi Syſtemata illa ſint Fluida duo Elaſtica ad modum Aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ Fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in Fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis proportionalia deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox reſiſtentiam patitur quæ eſt in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, reſiſtentia foret in eadem ratione duplicata accurate; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus nullis agitant, reſiſtentia eſt in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur Media tria *A*, *B*, *C* ex partibus ſimilibus & æqualibus & ſecundum diſtantias æquales regulariter diſpo-

diſpoſitis conſtantia. Partes Mediorum *A* & *B* fugiant ſe mutuo viribus quæ ſint ad invicem ut *T* & *V*, illæ Medii *C* ejuſmodi viribus omnino deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his Mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; ſitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G*, in ſubduplicata ratione virium *T* ad vires *V*: reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *E*, & reſiſtentia corporis *F* ad reſiſtentiam corporis *G*, in velocitatum ratione duplicata; & propterea reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *F* ut reſiſtentia corporis *E* ad reſiſtentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet Medium *B* ad formam & conditionem Medii *C* pro lubitu, & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his Mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum reſiſtentiæ corporum *D* & *F* ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velociſſime moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quam proxime: & propterea cum reſiſtentia corporis *F* ſit in duplicata ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis *D* in eadem ratione quam proxime.

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elaſtico velociſſime moti eadem fere eſt reſiſtentia ac ſi partes Fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuo non fugerent: ſi modo Fluidi vis Elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna ſit ut vires non habeant ſatis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes diſtantes ſe mutuo non fugiunt, ſint ut quadrata diametrorum; ſunt etiam æquivelocium & celerrime motorum corporum reſiſtentiæ in Fluido Elaſtico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & viciſſim

Digitized by Google

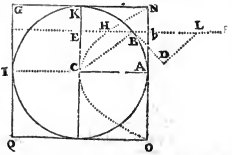
ciſſim (per motus Legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſtum eſt etiam quod in ejuſdem denſitatis Fluidis Elaſticis, ubi velociſſime moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quam proxime; ſive Fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex Medii ſubtilitate reſiſtentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita ſe habent in Fluidis, quorum vis Elaſtica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod ſi vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expanſione ad inſtar Lanæ vel ramorum Arborum, aut ex alia quavis cauſa, qua motus particularum inter ſe redduntur minus liberi: reſiſtentia, ob minorem Medii fluiditatem, erit major quam in ſuperioribus Corollariis.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si Globus & Cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in Medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias libere diſpoſitis conſtante, ſecundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit reſiſtentia Globi duplo minor quam reſiſtentia Cylindri.

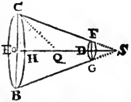
Nam quoniam actio Medii in corpus eadem eſt (per Legum Corol, 5.) ſive corpus in Medio quieſcente moveatur, ſive Medii particulæ eadem cum velocitate impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus quo impetu urgebitur a Medio movente. Deſignet igitur $ABKI$ corpus Sphæricum centro C ſemidiametro CA deſcriptum, & incidant particulæ Medii data cum velocitate in corpus illud Sphæricum, ſecundum rectas ipſi AC parallelas: Sitque FB ejuſmodi recta. In ea capiatur LB ſemidiametro CB æqualis, & ducatur BD quæ Sphæram tangat in B. In KC & BD demittantur



mittantur perpendiculares BE, DL, & vis qua particula Medii, ſecundum rectam FB oblique incidendo, Globum ferit in B, erit ad vim qua particula eadem Cylindrum $ONGQ$ axe ACI circa Globum deſcriptum perpendiculariter feriret in b, ut LD ad LB vel BE ad BC. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum Globum ſecundum incidentiæ ſuæ plagam FB vel AC, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum Globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundum plagam rectæ BC qua Globum directe urget, ut BE ad BC. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ, in Globum ſecundum rectam FB oblique incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in Cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut BE quadratum ad BC quadratum. Quare ſi ad Cylindri baſem circularem NAO erigatur perpendiculum bHE, & ſit bE æqualis radio AC, & bH æqualis $\frac{BE\ quad}{CB}$: erit bH ad bE ut effectus particulæ in Globum ad effectum particulæ in Cylindrum. Et propterea ſolidum quod à rectis omnibus bH occupatur erit ad ſolidum quod à rectis omnibus bE occupatur, ut effectus particularum omnium in Globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed ſolidum prius eſt Parabolois vertice C, axe CA & latere recto CA deſcriptum, & ſolidum poſterius eſt Cylindrus Paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt quod Parabolois ſit ſemiſſis Cylindri circumſcripti. Ergo vis tota Medii in Globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in Cylindrum. Et propterea ſi particulæ Medii quieſcerent, & Cylindrus ac Globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia Globi duplo minor quam reſiſtentia Cylindri. *Q.E.D.*

LIBER SECUNDUS.

Scholium.



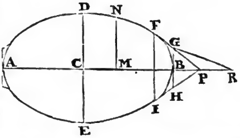
Eadem methodo Figuræ aliæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in Mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari $CEBH$, quæ centro O, radio OC deſcribitur, & altitudine OD, conſtruendum ſit fruſtum Coni $CBGF$, quod omnium eadem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundum plagam axis

Digitized by Google

DE MOTU CORPORUM axis ſui verſus $\mathcal{D}$ progredientium fruſtorum minime reſiſtatur: biſeca altitudinem $O\mathcal{D}$ in $\mathcal{Q}$ & produc $O\mathcal{Q}$ ad S ut ſit $\mathcal{Q}S$ æqualis $\mathcal{Q}C$, & erit S vertex Coni cujus fruſtum quæritur.

Unde obiter, cum angulus CSB ſemper ſit acutus, conſequens eſt, quod ſi ſolidum $A\mathcal{D}BE$ convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis $A\mathcal{D}BE$ circa axem AB facta generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus FG, GH, HI in punctis F, B & I, ea lege ut GH ſit perpendicularis ad axem in puncto contactus B, & FG, HI cum eadem GH contineant angulos FGB, BHI graduum 135: ſolidum, quod convolutione figuræ $A\mathcal{D}FGHIE$ circa axem eundem CB generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius; ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui AB progrediatur, & utriuſque terminus B præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis Navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.

Quod ſi Figura $\mathcal{D}NFG$ ejuſmodi ſit curva ut, ſi ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & à puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum ſecet in R, fuerit MN ad GR ut $GR\,cub$ ad $4BR \times GBq$:



Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem AB facta deſcribitur, in Medio raro prædicto ab A verſus B movendo, minus reſiſtetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine deſcriptum Solidum circulare.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si Medium rarum ex particulis quam minimis quieſcentibus æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias libere diſpoſitis conſtet: invenire reſiſtentiam Globi in hoc Medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eadem diametro & altitudine deſcriptus progredi intelligatur eadem velocitate ſecundum longitudinem axis ſui in eodem Medio. Et ponamus quod particulæ Medii in quas

Glo-

Globus vel Cylindrus incidit, vi reflexionis quam maxima reſiliant. Et cum reſiſtentia Globi (per Propoſitionem noviſſimam) ſit duplo minor quam reſiſtentia Cylindri, & Globus ſit ad Cylindrum ut duo ad tria, & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ipſaſque quam maxime reflectendo, duplam ſui ipſius velocitatem ipſis communicet: Cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis ſui deſcribit communicabit motum particulis qui ſit ad totum Cylindri motum ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri; & Globus quo tempore totam longitudinem diametri ſuæ deſcribit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit communicabit motum particulis qui ſit ad totum Globi motum ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Et propterea Globus reſiſtentiam patitur quæ ſit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

Cas. 2. Ponamus quod particulæ Medii in Globum vel Cylindrum incidentes non reflectantur; & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ſimplicem ſuam velocitatem ipſis communicabit, ideoque reſiſtentiam patitur duplo minorem quam in priore caſu, & reſiſtentia Globi erit etiam duplo minor quam prius.

Cas. 3. Ponamus quod particulæ Medii vi reflexionis neque maxima neque nulla, ſed mediocri aliqua reſiliant a Globo; & reſiſtentia Globi erit in eadem ratione mediocri inter reſiſtentiam in primo caſu & reſiſtentiam in ſecundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi Globus & particulæ ſint infinite dura, & vi omni elaſtica & propterea etiam vi omni reflexionis deſtituta: reſiſtentia Globi erit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari, quo tempore Globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

Corol. 2. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 3. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione diametri.

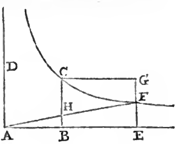
Corol. 4. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt ut denſitas Medii.

Corol. 5. Reſiſtentia Globi eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicata ratione diametri & ratione denſitatis Medii.

Corol.

Digitized by Google

Corol. 6. Et motus Globi cum ejus reſiſtentia ſic exponi poteſt. Sit AB tempus quo Globus per reſiſtentiam ſuam uniformiter continuatam totum ſuum motum amittere poteſt. Ad AB erigantur perpendicula AD, BC. Sitque BC motus ille totus, & per punctum C Aſymptotis AD, AB deſcribatur Hyperbola CF. Producatur AB ad punctum quodvis E. Erigatur perpendiculum EF Hyperbolæ occurrens in F. Compleatur parallelogrammum $CBEG$, & agatur AF ipſi BC occurrens in H. Et ſi Globus tempore quovis BE, motu ſuo primo BC uniformiter continuato, in Medio non reſiſtente deſcribat ſpatium $CBEG$ per aream parallelogrammi expoſitum, idem in Medio reſiſtente deſcribet ſpatium $CBEF$ per aream Hyperbolæ expoſitum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per Hyperbolæ ordinatam EF, amiſſa motus ejus parte FG. Et reſiſtentia ejus in fine temporis ejuſdem exponetur per longitudinem BH, amiſſa reſiſtentiæ parte CH. Patent hæc omnia per Corol. 1. Prop. v. Lib. II.



Corol. 7. Hinc ſi Globus tempore T per reſiſtentiam R uniformiter continuatam amittat motum ſuum totum M: idem Globus tempore t in Medio reſiſtente, per reſiſtentiam R in duplicata velocitatis ratione decreſcentem, amittet motus ſui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$, & deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium motu uniformi M eodem tempore t deſcriptum, ut Logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$. Nam area Hyperbolica $BCFE$ eſt ad rectangulum $BCGE$ in hac proportione.

Scholium.

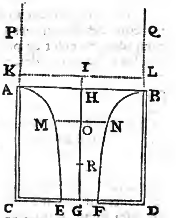
In hac Propoſitione expoſui reſiſtentiam & retardationem Projectilium Sphæricorum in Mediis non continuis, & oſtendi quod hæc reſiſtentia ſit ad vim qua totus Globi motus vel tolli poſſit vel generari

generari quo tempore Globus duas tertias diametri ſuæ partes, velocitate uniformiter continuata deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi, ſi modo Globus & particulæ Medii ſint ſumme elaſtica & vi maxima reflectendi polleant: quodque hæc vis ſit duplo minor ubi Globus & particulæ Medii ſunt infinite dura & vi reflectendi prorſus deſtituta. In Mediis autem continuis qualia ſunt Aqua, Oleum calidum, & Argentum vivum, in quibus Globus non incidit immediate in omnes fluidi particulas reſiſtentiam generantes, ſed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, reſiſtentia eſt adhuc duplo minor. Globus utique in hujuſmodi Mediis fluidiſſimis reſiſtentiam patitur quæ eſt ad vim qua totus ejus motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri ſuæ deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Id quod in ſequentibus conabimur oſtendere.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vaſe Cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium ſuperius, *CD* fundum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio fundi, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti perpendicularis. Et concipe cylindrum glaciei *APQB* ejuſdem eſſe latitudinis cum cavitate vaſis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo deſcendere, & partes ejus quam primum attingunt ſuperficiem *AB* liqueſcere, & in aquam converſas gravitate ſua defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* tranſire, idemque adæquate implere. Ea vero ſit uniformis velocitas glaciei deſcendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IH* acquirere poteſt; & jaceant *IH* & *HG* in directum, & per punctum *I* ducatur recta *KL* horizonti parallela & lateribus glaciei,



ciei occurrens in *K* & *L*. Et velocitas aquæ effluentis per foramen *EF* ea erit quam aqua cadendo ab *I* & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt. Ideoque per Theoremata *Galilæi* erit *IG* ad *IH* in duplicata ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo *AB*, hoc eſt, in duplicata ratione circuli *AB* ad circulum *EF*; nam hi circuli ſunt reciproce ut velocitates aquarum quæ per ipſos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquate tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem verſus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hic non conſideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæſionem ſuam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: ſed motum horizonti parallelum, a cohæſione illa oriundum, hic non conſideramus.

Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vaſe, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam eſſe, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum tranſeat. Et ſi aqua glaciem tantum non tangat vel, quod perinde eſt, ſi tangat & per glaciem propter ſummam ejus polituram quam liberrime & ſine omni reſiſtentia labatur; hæc defluet per foramen *EF* eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vaſis ſuſtinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liqueſcat jam glacies in vaſe; & effluxus aquæ quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam reſoluta conabitur deſcendere: non major, quia glacies in aquam reſoluta non poteſt deſcendere niſi impediendo deſcenſum aquæ alterius deſcenſui ſuo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

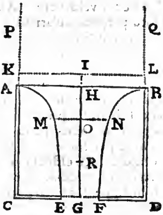
Sed foramen in fundo vaſis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus eſſe debet quam prius. Nam particulæ aquæ jam non tranſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed a lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis tranſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quam in ipſo foramine, exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proxime, ſi

modo

Digitized by Google

modo diametros recte dimenſus ſum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, exiſtente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur anguſtior, hanc laminam non fundo ſed lateri vaſis affixi ſic, ut vena illa egrederetur ſecundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquæ plenum eſſet, aperui foramen ut aqua effluerct; & venæ diameter, ad diſtantiam quaſi dimidii digiti à foramine quam accuratiſſime menſurata, prodiit partium viginti & unius quadrageſimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproxime. Per experimenta vero conſtat quod quantitas aquæ quæ per foramen circulare in fundo vaſis factum effluit, ea eſt quæ, pro diametro venæ, cum velocitate prædicta effluere debet.

In ſequentibus igitur, plano foraminis parallelum duci intelligatur planum aliud ſuperius ad diſtantiam diametro foraminis æqualem vel paulo majorem & foramine majore pertuſum, per quod utique vena cadat quæ adæquate impleat foramen inferius EF, atque adeo cujus diameter ſit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter tranſibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam ſolutio Problematis poſtulat quamproxime. Spatium vero quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vaſis haberi poteſt. Sed ut ſolutio Problematis ſimplicior ſit & magis Mathematica, præſtat adhibere planum ſolum inferius pro fundo vaſis, &



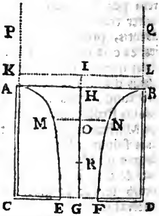
fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & è vaſe per foramen EF egrediebatur, motum ſuum perpetuo ſervet & glacies quietem ſuam etiamſi in aquam fluidam reſolvatur.

Cas. 2. Si foramen EF non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, ſi modo eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, ſed deſcendendo eandem

 dem velocitatem acquirit in utroque caſu, ut *Galilæus* demonſtravit.

Cas. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, ut intervallum inter ſuperficies *AB* & *KL* quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram Parabolicam efformet: ex latere recto hujus Parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea ſit quam corpus ab aquæ in vaſe ſtagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuiſſet. Facto utique experimento inveni quod, ſi altitudo aquæ ſtagnantis ſupra foramen eſſet viginti digitorum & altitudo foraminis ſupra planum horizonti parallelum eſſet quoque viginti digitorum, vena aquæ proſilientis incideret in planum illud ad diſtantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo quod in planum illud à foramine demittebatur captam. Nam ſine reſiſtentia vena incidere debuiſſet in planum illud ad diſtantiam digitorum 40, exiſtente venæ Parabolicæ latere recto digitorum 80.

Cas. 4. Quinetiam aqua effluens, ſi ſurſum feratur, eadem egreditur cum velocitate. Aſcendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vaſe ſtagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, niſi quatenus aſcenſus ejus ab aeris reſiſtentia aliquantulum impediatur; ac proinde ea effluit cum velocitate quam ab altitudine illa cadendo acquirere potuiſſet. Aquæ ſtagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter, per Prop. XIX. Lib. *II*, & preſſioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, ſive deſcendat per foramen in fundo vaſis, ſive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, ſive egrediatur in canalem & inde aſcendat per foramen parvum in ſuperiore canalis parte factum. Et velocitatem qua aqua effluit, eam eſſe quam in hac Propoſitione aſſignavimus, non ſolum ratione colligitur, ſed etiam per experimenta notiſſima jam deſcripta manifeſtum eſt.



Cas. 5. Eadem eſt aquæ effluentis velocitas ſive figura foraminis ſit circularis ſive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figura foraminis ſed ab ejus altitudine infra planum *KL*.

Cas. 6. Si vaſis *ABDC* pars inferior in aquam ſtagnantem immergatur,

mergatur, & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit GR: velocitas quacum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen EF in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IR acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſuſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minime accelerabit. Patebit etiam & hic Caſus per Experimenta, menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc ſi aquæ altitudo CA producatur ad K, ut ſit AK ad CK in duplicata ratione areæ foraminis in quavis fundi parte facti, ad aream circuli AB: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem KC acquirere poteſt.

Corol. 2. Et vis qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi Cylindricæ columnæ aquæ cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo $2GI$ vel $2CK$. Nam aqua exiliens quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine GI cadendo, velocitatem ſuam qua exilit, acquirere poteſt.

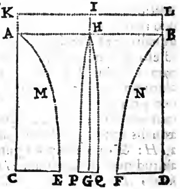
Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$, eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum AB & EF, ad duplum circulum EF. Sit enim IO media proportionalis inter IH & IG; & aqua per foramen EF egrediens, quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poſſet altitudinem IG, æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus EF & altitudo eſt $2IG$, id eſt, Cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo eſt $2IO$, nam circulus EF eſt ad circulum AB in ſubduplicata ratione altitudinis IH ad altitudinem IG, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poteſt altitudinem IH, aqua egrediens æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo eſt $2IH$: & quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G deſcribit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, id eſt, aqua tota in ſolido $ABNFEM$ æqualis erit differentiæ Cylindrorum, id eſt, Cylindro cujus baſis eſt AB & altitudo $2HO$. Et propterea aqua tota in vaſe $ABDC$ eſt ad aquam totam cadentem in ſolido $ABNFEM$ ut HG ad $2HO$, id eſt, ut $HO+OG$ ad $2HO$, ſeu $IH+IO$ ad $2IH$. Sed pondus aquæ totius in ſolido $ABNFEM$ in aquæ defluxum impenditur: ac proinde

inde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2IH$, atque adeo ut ſumma circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$, eſt ad ponderis partem alteram quam fundum vaſis ſuſtinet, ut ſumma circulorum AB & EF, ad differentiam eorundem circulorum.

Corol. 5. Et ponderis pars quam fundum vaſis ſuſtinet, eſt ad ponderis partem alteram quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum AB & EF, ad duplum circulum minorem EF, ſive ut area fundi ad duplum foramen.

Corol. 6. Ponderis autem pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF, ſive ut circulus AB ad exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum. Nam ponderis pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius in vaſe, ut differentia circulorum AB & EF, ad ſummam eorundem circulorum, per Cor. 4; & pondus aquæ totius in vaſe eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad differentiam circulorum AB & EF. Itaque ex æquo perturbate, ponderis pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF vel exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum.



Corol. 7. Si in medio foraminis EF locetur Circellus PQ centro G deſcriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille ſuſtinet, majus eſt pondere tertiæ partis Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt GH. Sit enim $ABNFEM$ cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens GH ut ſupra, & congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, tam in circuitu cataractæ quam ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit PHQ columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens H & altitudinem GH. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata $AMEC$, $BNFD$ convexa eſt in ſuperficie interna AME, BNF verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna PHQ con-

Digitized by Google

convexa erit verſus cataractam, & propterea major Cono cujus baſis eſt circellus ille *PQ* & altitudo *GH*, id eſt, major tertia parte Cylindri eadem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id eſt, pondus quod pondere Coni ſeu tertiæ partis Cylindri illius majus eſt.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* ſuſtinet, minor eſt pondere duarum tertiarum partium Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *HG*. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium Sphæroidis cujus baſis eſt circellus ille & ſemiaxis ſive altitudo eſt *HG*. Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus Cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ *PHQ* cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maxime directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi *PQ* in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuo acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille ſit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eadem vero ſurſum acuta erit ſeu cuſpidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem Sphæroidis ſit infinite velocior quam ejus motus horizontem verſus. Et quo minor eſt circellus *PQ* eo acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus *PHQ* in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eſt igitur columna illa minor dimidio Sphæroidis, ſeu duabus tertiis partibus Cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo *GH*. Suſtinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* ſuſtinet, æquale eſt ponderi Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}GH$ quamproxime. Nam pondus hocce eſt medium Arithmeticum inter pondera Coni & Hemiſphæroidis prædictæ. At ſi circellus ille non ſit valde parvus, ſed augeatur donec æquet foramen *EF*; hic ſuſtinebit pondus aquæ totius ſibi perpendiculariter imminentis, id eſt, pondus Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *GH*.

Corol. 10. Et (quantum ſentio) pondus quod circellus ſuſtinet, eſt ſemper ad pondus Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}GH$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, ſive ut circulus *EF* ad exceſſum circuli hujus ſupra ſemiſſem circelli *PQ* quamproxime.

LEMMA.

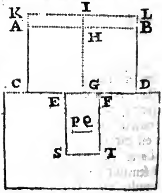
LEMMA IV.

Cylindri, qui ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia ex aucta vel diminuta ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem eſt cum reſiſtentia Circuli eadem diametro deſcripti & eadem velocitate ſecundum lineam rectam plano ipſius perpendicularem progredientis.

Nam latera Cylindri motui ejus minime opponuntur: & Cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminuta, in Circulum vertitur.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compreſſo infinito & non elaſtico ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia quæ oritur a magnitudine ſectionis tranſverſæ, eſt ad vim qua totus ejus motus interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproxime.



Nam ſi vas *ABDC* fundo ſuo *CD* ſuperficiem aquæ ſtagnantis tangat, & aqua ex hoc vaſe per canalem Cylindricum *EFTS* horizonti perpendicularem in aquam ſtagnantem effluat, locetur autem Circellus *PQ* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *CA* ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicata ratione quam habet exceſſus orificii canalis *EF* ſupra circellum *PQ* ad circulum *AB*: manifeſtum eſt (per Caſ. 5, Caſ. 6, & Cor. 1. Prop. XXXVI.) quod velocitas aquæ tranſeuntis per ſpatium annulare inter circellum & latera vaſis, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *KC* vel *IG* acquirere poteſt.

Et

Digitized by Google

Et (per Cor. 10, Prop. xxxvi) ſi vaſis latitudo ſit infinita, ut lineola HI evaneſcat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus Cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proxime. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ in quacunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & aſcendat circellus in fluido undique compreſſo & aſcenſu ſuo cogat aquam ſuperiorem deſcendere per ſpatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli aſcendentis erit ad velocitatem aquæ deſcendentis ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ, & velocitas circelli aſcendentis ad ſummam velocitatum, hoc eſt, ad velocitatem relativam aquæ deſcendentis qua præterfluit circellum aſcendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, ſive ut $EFq - PQq$ ad EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati qua ſupra oſtenſum eſt aquam tranſire per idem ſpatium annulare dum circellus interea immotus manet, id eſt, velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt: & vis aquæ in circellum aſcendentem eadem erit ac prius, per Legum Cor. 5, id eſt, Reſiſtentia circelli aſcendentis erit ad pondus Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quamproxime. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq - \frac{1}{2}PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea Velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt, Reſiſtentia vero ejus æqualis evadet ponderi Cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo dimidium eſt altitudinis IG, a qua Cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli aſcendentis acquirat; & hac velocitate Cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis ſuæ deſcribet. Reſiſtentia autem Cylindri, hac velocitate ſecundum longitudinem ſuam progredientis, eadem eſt cum Reſiſtentia circelli per Lemma iv; ideoque æqualis eſt Vi qua motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari poteſt quamproxime.

Si

Si longitudo Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augebitur vel minuetur in eadem ratione; adeoque Vis illa qua motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ Cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

Si denſitas Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & Vis qua motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque Cylindri cujuſcunque erit ad Vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproxime. *Q.E.D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, continuum vero eſſe & non elaſticum ut preſſio omnis quæ ab ejus compreſſione oritur propagetur in inſtanti &, in omnes moti corporis partes æqualiter agendo, reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & Reſiſtentiam creat. Preſſio autem quæ oritur a compreſſione fluidi, utcunque fortis ſit, ſi propagetur in inſtanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque reſiſtentiam nec auget nec minuit. Certe Actio fluidi, quæ ab ejus compreſſione oritur, fortior eſſe non poteſt in partes poſticas corporis moti quam in ejus partes anticas, ideoque reſiſtentiam in hac Propoſitione deſcriptam minuere non poteſt: & fortior non erit in partes anticas quam in poſticas, ſi modo propagatio ejus infinite velocior ſit quam motus corporis preſſi. Infinite autem velocior erit & propagabitur in inſtanti, ſi modo fluidum ſit continuum & non elaſticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui ſecundum longitudines ſuas in Mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis Mediorum.

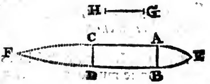
Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, ſed Cylindrus in Medio quieſcente incluſo ſecundum longitudinem ſuam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: Reſiſtentia ejus erit ad vim qua totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$ ſemel

ſemel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione denſitatis Medii ad denſitatem Cylindri.

Corol. 3. Iiſdem poſitis, & quod longitudo L ſit ad quadruplum longitudinis Cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad EFq ſemel, & ratione $EFq - PQq$ ad EFq bis: reſiſtentia Cylindri erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum longitudinem L deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri.

Scholium.

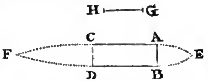
In hac Propoſitione reſiſtentiam inveſtigavimus quæ oritur a ſola magnitudine tranſverſæ ſectionis Cylindri, neglecta reſiſtentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri poſſit. Nam quemadmodum in caſu primo Propoſitionis XXXVI, obliquitas motuum quibus partes aquæ in vaſe, undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: ſic in hac Propoſitione, obliquitas motuum quibus partes aquæ ab anteriore Cylindri termino preſſæ, cedunt preſſioni & undique divergunt, retardat eorum tranſitum per loca in circuitu termini illius antecedentis verſus poſteriores partes Cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem diſtantiam commoveatur & reſiſtentiam auget, idque in ea fere ratione qua effluxum aquæ e vaſe diminuit, id eſt, in ratione duplicata 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propoſitionis illius caſu primo, effecimus ut partes aquæ perpendicnlariter & maxima copia tranſirent per foramen EF, ponendo quod aqua omnis in vaſe quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret ſine motu: ſic in hac Propoſitione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ motu maxime directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum Cylindro, & ſola maneat reſiſtentia quæ oritur a magnitudine ſectionis tranſverſæ, quæque diminui non poteſt niſi diminuendo diametrum Cylindri, concipiendum eſt quod partes fluidi quarum motus ſunt obliqui & inutiles & reſiſtentiam creant, quieſcant inter ſe ad utrumque Cylindri terminum, & cohæreant & Cylindro jungantur. Sit $ABCD$ rectangulum, & ſint AE & BE arcus duo Parabolici axe AB deſcripti, latere autem recto quod ſit ad ſpa-



S ſ tium

Digitized by Google

tium *HG*, deſcribendum a Cylindro cadente dum velocitatem ſuam acquirit, ut *HG* ad $\frac{1}{2}$*AB*. Sint etiam *CF* & *DF* arcus alii duo Parabolici, axe *CD* & latere recto quod ſit prioris lateris recti quadruplum deſcripti; & convolutione figuræ circum axem *EF* generetur ſolidum cujus media pars *ABDC* ſit Cylindrus de quo agimus, & partes extremæ *ABE* & *CDF* contineant partes fluidi inter ſe quieſcentes & in corpora duo rigida concretas, quæ Cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et ſolidi *EACFDB*, ſecundum longitudinem axis ſui *FE* in partes verſus *E* progredientis, reſiſtentia ea erit quamproxime quam in hac Propoſitione deſcripſimus, id eſt, quæ rationem illam habet ad vim qua totus Cylindri motus, interea dum longitudo 4*AC* motu illo uniformiter continuato deſcribatur, vel tolli poſſit vel generari, quam denſitas Fluidi habet ad denſitatem Cylindri quamproxime. Et hac vi Reſiſtentia minor eſſe non poteſt quam in ratione 2 ad 3, per Corol. 7. Prop. XXXVI.



LEMMA V.

Si Cylindrus, Sphæra & Sphærois, quorum latitudines ſunt æquales, in medio canalis Cylindrici ita locentur ſucceſſive ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

Nam ſpatia inter Canalem & Cylindrum, Sphæram, & Sphæroidem per quæ aqua tranſit, ſunt æqualia: & aqua per æqualia ſpatia æqualiter tranſit.

LEMMA VI.

Iiſdem poſitis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aqua per canalem fluente.

Patet per Lemma V & Motus Legem tertiam. Aqua utique & corpora in ſe mutuo æqualiter agunt.

LEMMA

Digitized by Google

LEMMA VII.

Si aqua quieſcat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum reſiſtentiæ inter ſe.

Conſtat ex Lemmate ſuperiore, nam motus relativi iidem inter ſe manent.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his Lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & Medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus ſuis obliquis & ſuperfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in Scholio Propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentia omnium minima quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figura ſint obtuſa; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & cauda ſint acutis. Et corpora in fluidis elaſticis mota, ſi ante & poſt obtuſa ſint, fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & cauda ſint acutis. Sed nos in his Lemmatis & Propoſitionibus non agimus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de alte immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis, qualis eſt Aer, quam in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in Fluido compreſſo infinito & non elaſtico uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim qua totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Fluidi ad denſitatem Globi quamproxime.

Nam Globus eſt ad Cylindrum circumſcriptum ut duo ad tria; & propterea Vis illa, quæ tollere poſſit motum omnem Cylindri interea dum Cylindrus deſcribat longitudinem quatuor diametrorum, Globi motum omnem tollet interea dum Globus deſcribat duas tertias partes hujus longitudinis, id eſt, octo tertias partes diametri propriæ. Reſiſtentia autem Cylindri eſt ad hanc Vim quamproxime ut denſitas Fluidi ad denſitatem Cylindri vel Globi, per Prop. XXXVII; & Reſiſtentia Globi æqualis eſt Reſiſtentiæ Cylindri, per Lem. V, VI, VII. *Q. E. D.*

Corol. 1. Globorum, in Mediis compreſſis infinitis, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis, & duplicata ratione diametri, & duplicata ratione denſitatis Mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quacum Globus, vi ponderis ſui comparativi, in fluido reſiſtente poteſt deſcendere, ea eſt quam acquirere poteſt Globus idem, eodem pondere, abſque reſiſtentia cadendo & caſu ſuo deſcribendo ſpatium quod ſit ad quatuor tertias partes diametri ſuæ ut denſitas Globi ad denſitatem Fluidi. Nam Globus tempore caſus ſui, cum velocitate cadendo acquiſita, deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias diametri ſuæ, ut denſitas Globi ad denſitatem Fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare poſſit quo tempore Globus octo tertias diametri ſuæ eadem velocitate deſcribit, ut denſitas Fluidi ad denſitatem Globi: ideoque per hanc Propoſitionem, vis ponderis æqualis erit vi Reſiſtentiæ, & propterea Globum accelerare non poteſt.

Corol. 3. Data & denſitate Globi & velocitate ejus ſub initio motus, ut & denſitate fluidi compreſſi quieſcentis in qua Globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas Globi & ejus reſiſtentia & ſpatium ab eo deſcriptum, per Corol. 7. Prop. XXXV.

Corol.

Corol. 4. Globus in fluido compreſſo quieſcente ejuſdem ſecum denſitatis movendo, dimidiam motus ſui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipſius diametrorum deſcripſerit, per idem Corol. 7.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per Fluidum in canali Cylindrico clauſum & compreſſum uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim qua totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi Globi, & ratione duplicata orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra circulum maximum Globi, & ratione denſitatis Fluidi ad denſitatem Globi quamproxime.

Patet per Corol. 2. Prop. XXXVII; procedit vero demonſtratio quemadmodum in Propoſitione præcedente.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in Medio fluidiſſimo compreſſo progredientis, invenire reſiſtentiam per Phænomena.

Sit A pondus Globi in vacuo, B pondus ejus in Medio reſiſtente, D diameter Globi, F ſpatium quod ſit ad $\frac{4}{3}$D ut denſitas Globi ad denſitatem Medii, id eſt, ut A ad A − B, G tempus quo Globus pondere B abſque reſiſtentia cadendo deſcribit ſpatium F, & H velocitas quam Globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima quacum Globus, pondere ſuo B, in Medio reſiſtente poteſt deſcendere, per Corol. 2, Prop. XXXVIII; & reſiſtentia quam Globus ea cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: reſiſtentia vero quam patitur in alia quacunque velocitate, erit ad pondus B in duplicata ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam G, per Corol. 1, Prop. XXXVIII.

Hæc

Hæc eſt reſiſtentia quæ oritur ab inertia materiæ Fluidi. Ea vero quæ oritur ab elaſticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, ſic inveſtigabitur.

Demittatur Globus ut pondere ſuo B in Fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus N qui congruit Logarithmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, ſitque L Logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo autem deſcripta erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611F + 4,605170186LF$. Si Fluidum ſatis profundum ſit, negligi poteſt terminus $4,605170186LF$; & erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611F$ altitudo deſcripta quamproxime. Patent hæc per Libri ſecundi Propoſitionem nonam & ejus Corollaria, ex Hypotheſi quod Globus nullam aliam patiatur reſiſtentiam niſi quæ oritur ab inertia materiæ. Si vero aliam inſuper reſiſtentiam patiatur, deſcenſus erit tardior, & ex retardatione innoteſcet quantitas hujus reſiſtentiæ.

Ut corporis in Fluido cadentis velocitas & deſcenſus facilius innoteſcant, compoſui Tabulam ſequentem, cujus columna prima denotat tempora deſcenſus, ſecunda exhibet velocitates cadendo acquiſitas exiſtente velocitate maxima 100000000, tertia exhibet ſpatia temporibus illis cadendo deſcripta, exiſtente 2F ſpatio quod corpus tempore G cum velocitate maxima deſcribit, & quarta exhibet ſpatia iiſdem temporibus cum velocitate maxima deſcripta. Numeri in quarta columna ſunt $\frac{2P}{G}$, & ſubducendo numerum $1,3862944 - 4,6051702L$, inveniuntur numeri in tertia columna, & multiplicandi ſunt hi numeri per ſpatium F ut habeantur ſpatia cadendo deſcripta. Quinta his inſuper adjecta eſt columna, quæ continet ſpatia deſcripta iiſdem temporibus a corpore, vi ponderis ſui comparativi B, in vacuo cadente.

Tempora

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido*	*Spatia cadendo deſcripta in fluido*	*Spatia motu maximo deſcripta.*	*Spatia cadendo deſcripta in vacuo.*
0,001 G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,25 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20 F	100 F

Scholium.

Ut reſiſtentias Fluidorum inveſtigarem per Experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digitorum novem pedis *Londinenſis*, profunditate pedum novem cum ſemiſſe, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plumbo incluſo formatis, notavi tempora deſcenſus globorum, exiſtente deſcenſus altitudine 112 digitorum pedis. Pes ſolidus cubicus *Londinenſis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus ſolidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus ſeu grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius deſcriptus continet grana 132,645

132,645 in Medio aeris, vel grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet alius eſt ut exceſſus ponderis ejus in vacuo ſupra pondus ejus in aqua.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

Pondus globi in vacuo eſt $156\frac{13}{38}$ *gran*, & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aqua eſt $79\frac{13}{38}$ *gran.* Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in vacuo, ita denſitas aquæ ad denſitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2 F, quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, cadendo in vacuo deſcribet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, abſque reſiſtentia cadendo in aqua deſcribet digitos 95,219; & tempore G, quod ſit ad minutum unum ſecundum in ſubduplicata ratione ſpatii F ſeu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig*, deſcribet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quacum poteſt in aqua deſcendere. Eſt igitur tempus G $0'',15244$. Et hoc tempore G, cum velocitate illa maxima H, globus deſcribet ſpatium 2 F digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet ſpatium digitorum 116,1245. Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 3,0676 *dig.* & manebit ſpatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aqua, in vaſe ampliſſimo, tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet. Hoc ſpatium, ob anguſtiam vaſis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod Globus cadendo in aqua in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per Theoriam deſcribere debuit quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per Experimentum.

Exper. 2. Tres Globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aqua, ſucceſſive demittebantur; & unuſquiſque cecidit in aqua tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Com-

Digitized by Google

Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{1}{12}$ *gran*, exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in aqua $71\frac{17}{48}$ *gran*, diameter globi 0,81296 *dig*, octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig*, ſpatium 2 F 2,3217 *dig*, ſpatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran*, tempore 1″, abſque reſiſtentia cadendo deſcribat 12,808 *dig*, & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum poteſt in aqua vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* deſcendere, tempore 0″,301056 deſcribet ſpatium 2,3217 *dig.* & tempore 15″ ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vaſe latiſſimo cadendo deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore 15″ deſcribere debuit per Theoriam quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per Experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aqua, ſucceſſive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per Theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ceciderunt, vel bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempeſtatis vel manus globum demittentis, vel erroribus inſenſibilibus in ponderandis globis in aqua, vel denique minori proportioni reſiſtentiæ quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur ad reſiſtentiam quæ oritur ab aliis cauſis, tribuendum eſſe puto. Ideoque pondus globi in aqua debet eſſe plurium granorum ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus deſcripta cæpi ut inveſtigarem reſiſtentias fluidorum antequam Theoria, in Propoſitionibus proxime præcedentibus expoſita, mihi innoteſceret. Poſtea, ut Theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cera & plumbo incluſo globos quatuor formavi, ſingulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aqua. Et hos demiſi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad ſemi-minuta ſecunda oſcillans, menſurarem. Globi, ubi ponderabantur & poſtea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manſerant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non ſtatim ad denſitatem priſtinam per

Digitized by Google

De Motu Corporum.

frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis deſcenſus eorum ſub initio acceleraretur. Et ubi penitus immerſi quieſcebant, demittebantur quam cautiſſime, ne impulſum aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem ſucceſſive temporibus oſcillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempeſtas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oſcillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento ſæpius capto, Globi ceciderunt maxima ex parte temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, ſuſpicor eoſdem retardatos fuiſſe impingendo in latera vaſis.

Jam computum per Theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aqua $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi abſque reſiſtentia cadendo deſcribit 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maxima quacum poteſt in aqua vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum deſcendere, tempore 0″,376843 deſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ ſpatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ ſeu oſcillationum 50 ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum maximum globi, & ſimplici ratione ejuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe tempore oſcillationum 50 deſcribere debuit per Theoriam quamproxime. Deſcripſit vero ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per Experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 29 quamproxime.

Exper.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{1}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproxime.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{1}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproxime.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra, latere illo quod forte gravius eſſet, primum deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas, globus majorem motum communicat aquæ, quam ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motus proprii quo deſcendere deberet: & pro majore vel minore oſcillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit ſemper a latere ſuo quod per oſcillationem deſcendit, & recedendo appropinquat lateribus vaſis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oſcillatio in globis gravioribus fortior eſt, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oſcillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cera & plumbo conſtruxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope ſuperficiem ejus; & globum ita demiſi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, eſſet infimum ab initio deſcenſus. Sic oſcillationes factæ ſunt multo minores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis ſequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aqua, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maxima ex parte tempore oſcillationum 51 circiter, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{1}{4}$ in aqua, ſæpius demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum

 non

non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam vero hi globi cadere debuerunt tempore oſcillationum $11\frac{1}{3}$ quamproxime.

Exper. 10. Globi quatuor pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant temporibus oſcillationum $17\frac{1}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, deſcribentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oſcillationum 19, nonnunquam audivi impulſum eorum in latera vaſis antequam ad fundum pervenerunt.

Per Theoriam vero cadere debuerunt tempore oſcillationum $15\frac{4}{9}$ quamproxime.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{21}{32}$ in aqua, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maxima ex parte 44 & 45, deſcribentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{1}{8}$ in aqua, aliquoties demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum 61, 62, 63, 64 & 65, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Et per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $64\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per hæc Experimenta manifeſtum eſt quod, ubi globi tarde ceciderunt, ut in experimentis ſecundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi recte exhibentur per Theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis ſextis, nonis ac decimis, reſiſtentia paulo major extitit quam in duplicata ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oſcillant aliquantulum; & hæc oſcillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem cito ceſſat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non niſi poſt plures oſcillationes ab aqua ambiente cohiberi poteſt. Quinetiam globi, quo velociores ſunt, eo minus premuntur a fluido ad poſticas ſuas partes; & ſi velocitas perpetuo augeatur, ſpatium vacuum tandem a tergo relinquent, niſi compreſſio fluidi ſimul augeatur. Debet autem compreſſio fluidi (per Prop. XXXII & XXXIII) augeri in duplicata ratione velocitatis, ut reſiſtentia ſit in eadem duplicata ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minus premuntur a tergo, & defectu preſſionis hujus, reſiſtentia eorum fit paulo major quam in duplicata ratione velocitatis.

Con-

Digitized by Google

Congruit igitur Theoria cum phænomenis corporum cadentium in Aqua, reliquum eſt ut examinemus phænomena cadentium in Aere.

Exper. 13. A culmine Eccleſiæ *S^ti Pauli*, in urbe *Londini*, globi duo vitrei ſimul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo deſcribebant altitudinem pedum *Londinenſium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis ſuſpendebatur, ad alterum peſſulo ligneo incumbebat; & globi duo huic Tabulæ impoſiti ſimul demittebantur, ſubtrahendo peſſulum, ut Tabula polis ferreis ſolummodo innixa ſuper iiſdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta ſecunda oſcillans, per filum ferreum a peſſulo ad imam Eccleſiæ partem tendens, dimitteretur & oſcillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in Tabula ſequente.

Globorum mercurio plenorum.			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4″	510 *gran.*	5,1 *digit.*	$8''\frac{1}{2}$
983	0,8	4 −	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	$8\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	$8\frac{1}{2}$
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Cæterum tempora obſervata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per Theoriam *Galilæi*) minutis quatuor ſecundis deſcribent pedes *Londinenſes* 257, & pedes 220 minutis tantum 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto peſſulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tarda ſua devolutione impediebat deſcenſum globorum ſub initio. Nam globi incumbebant Tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propiores erant axi ejus quam peſſulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præſertim in globis majoribus qui Tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto, tempora quibus globi ſex majores cecidere, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Glo-

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 conſtructus, cecidit tempore $8'' \; 12'''$, deſcribendo altitudinem pedum 220. Pondus aquæ huic globo æqualis, eſt 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis eſt $\frac{16600}{860}$ *gran.* ſeu $19\frac{3}{10}$ *gran*; ideoque pondus globi in vacuo eſt $502\frac{3}{10}$ *gran*; & hoc pondus eſt ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita ſunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id eſt, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto ſuo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$ ut ſupra, & pondere 483 *gran.* deſcribit digitos 185,905, & eodem pondere 483 *gran.* etiam in vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* tempore $57''' \; 58''''$, & velocitatem maximam acquirit quacum poſſit in aere deſcendere. Hac velocitate globus, tempore $8'' \; 12'''$, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863 F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus, tempore $8'' \; 12'''$, cadendo deſcribere debuit per Theoriam. Deſcripſit vero ſpatium 220 pedum per Experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci Tabulam ſequentem.

Globorum pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum* 220.		*Spatia deſcribenda per Theoriam.*		*Exceſſus*	
510 *gran.*	5,1 *dig.*	$8''$	$12'''$	226 *ped.*	11 *dig.*	6 *ped.*	11 *dig.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Globorum igitur tam in Aere quam in Aqua motorum reſiſtentia prope omnis per Theoriam noſtram recte exhibetur, ac denſitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis eſt.

In

In Scholio quod Sectioni ſextæ ſubjunctum eſt, oſtendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in Aere, Aqua, & Argento vivo motorum reſiſtentiæ ſunt ut fluidorum denſitates. Idem hic oſtendimus magis accurate per experimenta corporum cadentium in Aere & Aqua. Nam pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis ſemper contrarium, & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili quo pendulum ſuſpendebatur, totam Penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt quam reſiſtentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in Scholio illo expoſita, globus ejuſdem denſitatis cum Aqua, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in Aere, amittere deberet motus ſui partem $\frac{1}{3342}$. At per Theoriam in hac ſeptima Sectione expoſitam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem deſcribendo longitudinem eandem, amittere deberet motus ſui partem tantum $\frac{1}{4586}$, poſito quod denſitas Aquæ ſit ad denſitatem Aeris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in Aere, Aqua, & Argento vivo oſcillantium reſiſtentiæ a cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his Mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, ſatis recte exhibebitur. Et inde concludi poteſt quod corporum in fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates fluidorum.

His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motus ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproxime. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}$D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, per

Corol.

Digitized by Google

Corol. 7, Prop. xxxv. In motibus tardis reſiſtentia poteſt eſſe paulo minor, propterea quod figura Globi paulo aptior ſit ad motum quam figura Cylindri eadem diametro deſcripti. In motibus velocibus reſiſtentia poteſt eſſe paulo major, propterea quod elaſticitas & compreſſio fluidi non augeantur in duplicata ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis Aer, Aqua, Argentum vivum & ſimilia fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent Media infinite fluida; tamen globis projectis haud minus reſiſterent. Nam reſiſtentia, de qua agitur in Propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertia materiæ; & inertia materiæ corporibus eſſentialis eſt & quantitati materiæ ſemper proportionalis. Per diviſionem partium fluidi, reſiſtentia quæ oritur a tenacitate & frictione partium, diminui quidem poteſt: ſed quantitas materiæ per diviſionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ cui reſiſtentia, de qua hic agitur, ſemper proportionalis eſt. Ut hæc reſiſtentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in ſpatiis per quæ corpora moventur. Et propterea ſpatia Cœleſtia, per quæ globi Planetarum & Cometarum in omnes partes liberrime & abſque omni motus diminutione ſenſibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo deſtituuntur, ſi forte vapores longe tenuiſſimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab exceſſu preſſionis fluidi ad projectilis partes anticas ſupra preſſionem ad ejus partes poſticas, & non minor eſſe poteſt in Mediis infinite fluidis quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro denſitate materiæ in ſingulis. Hic autem preſſionis exceſſus, pro quantitate ſua, non tantum motum ciet in fluido, ſed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea reſiſtentia in omni fluido, eſt ut motus in fluido a projectili excitatus, nec minor eſſe poteſt in Æthere ſubtiliſſimo pro denſitate Ætheris, quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro denſitatibus horum fluidorum.

SECTIO

Digitized by Google

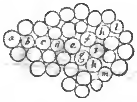
SECTIO VIII.

De Motu per Fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Preſſio non propagatur per Fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.

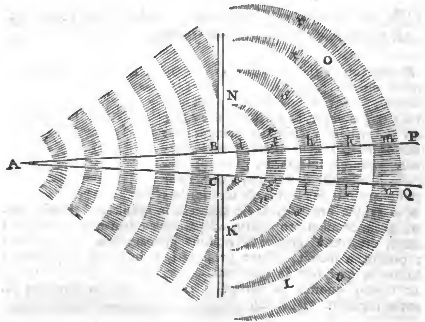
Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, poteſt quidem preſſio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique poſitas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem niſi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* eaſque premant, & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit oblique propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si preſſionis, a dato puncto per Fluidum propagatæ, pars aliqua obſtaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in ſpatia pone obſtaculum. Id quod ſic etiam demonſtrari poteſt. A puncto *A* propagetur preſſio quaquaverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas, & obſtaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem Coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* tranſit. Planis tranſverſis *de*, *fg*, *hi* diſtinguatur conus *APQ* in fruſta; & interea dum conus *ABC*, preſſionem propagando, urget fru-

Digitized by Google

ſtum conicum ulterius *degf* in ſuperficie *de*, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum *fgih* in ſuperficie *fg*, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus Legem tertiam) quod fruſtum primum *defg*, reactione fruſti ſecundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *fg*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *degf* inter conum *Ade* & fruſtum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eadem comprimatur undique.



Eodem igitur impetu quo premitur in ſuperficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ibique (cum rigidum non ſit, ſed omnimodo Fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi Fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam Fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam fruſtum *fghi* eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur a lateribus *df*, *eg* in ſpatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur a ſuperficie *fg* verſus *PQ*. *Q.E.D.*

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

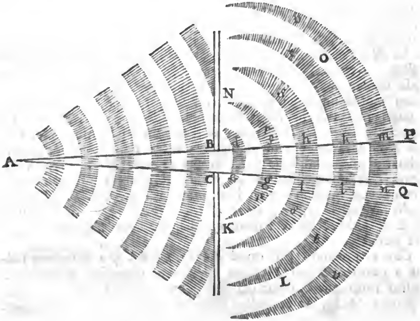
Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in ſpatia immota.

Caſ. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *BC*, pergatque (ſi fieri poteſt) in ſpatio conico *BCQP*, ſecundum lineas rectas divergentes a puncto *C*. Et ponamus primo quod motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in Fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde, verſus *KL* & *NO*: & quoniam in undarum vallibus depreſſior eſt quam in Fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, poſteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur verſus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* verſus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non eſt quam pro celeritate deſcenſus; & deſcenſus aquæ, hinc inde, verſus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum, hinc inde, verſus *KL* & *NO*, eadem velocitate qua undæ ipſæ ab *A* verſus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde, verſus *KL* & *NO*, ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q.E.D.* Hæc ita ſe habere quilibet in aqua ſtagnante experiri poteſt.

Caſ. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* deſignent pulſus a puncto *A*, per Medium Elaſticum, ſucceſſive propagatos. Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones Medii, ſic ut pulſus cujuſque pars denſiſſima ſphæricam occupet ſuperficiem circa centrum *A* deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam Medium ibi denſius eſt quam in ſpatiis hinc inde verſus *KL* & *NO*, dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla;

Digitized by Google

eoque pacto rarius ſemper evadens e regione intervallorum ac denſius e regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur a perpetua relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora; & pulſus eadem fere celeritate ſeſe in Medii partes quieſcentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulſus illi eadem fere celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; adeoque ſpatium totum *KLON* occupabunt. *Q.E.D.* Hoc experimur in Sonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppoſitis, quam a feneſtra directe propagati, quantum ex ſenſu judicare licet.



Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quatenus partes Medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ ſunt, ideoque recedunt quaquaverſum in regiones ubi minus premuntur:

muntur: recedent eædem verſus Medii partes omnes quieſcentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* tranſiit, dilatari incipiet & abinde, tanquam a principio & centro, in partes omnes directe propagari. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in Medio Elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in Medio vero non Elaſtico motum circularem excitabit.

Cas. 1: Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes Medii ſibi proximas, & urgendo compriment eaſdem & condenſabunt; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant haſce Medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur, ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando, non rareſierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rareſiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per Medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per Propoſitionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum ſphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei

Digitized by Google

De Motu Corporum rei exemplum aliquod habemus in Undis, quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas Undarum ſupplet locum vis Elaſticæ.

*Caſ.*2. Quod ſi Medium non ſit Elaſticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; ſed in circulum eundo, pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat ſemper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q.E.D.*

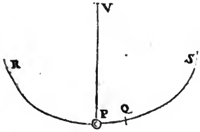
Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium Flammæ ad preſſionem, per Medium ambiens, ſecundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſola partium Flammæ, ſed a totius dilatatione derivari.

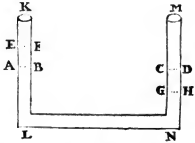
PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in Canalis cruribus erectis KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem Pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in Canali: dico quod aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus quibus Pendulum oſcillatur.*

Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ quæ oritur

oritur ab attritu canalis, hic non conſidero. Deſignent igitur *AB*, *CD* mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure *KL* aſcendit ad altitudinem *EF*, deſcenderit aqua in crure *MN* ad altitudinem *GH*. Sit autem *P* corpus pendulum, *VP* filum, *V* punctum ſuſpenſionis, *SPQR* Cyclois quam Pendulum deſcribat, *P* ejus punctum infimum, *PQ* arcus altitudini *AE* æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus acceleratur





& retardatur, eſt exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure *KL* aſcendit ad *EF*, & in crure altero deſcendit ad *GH*, vis illa eſt pondus duplicatum aquæ *EABF*, & propterea eſt ad pondus aquæ totius ut *AE* ſeu *PQ* ad *VP* ſeu *PR*. Vis etiam, qua pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in Cycloide, (per Corol. Prop. LI.) eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia *PQ* a loco infimo *P*, ad Cycloidis longitudinem *PR*. Quare aquæ & penduli, æqualia ſpatia *AE*, *PQ* deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; ideoque, ſi aqua & pendulum in principio quieſcunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt Iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſium* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis, tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicata.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicata ratione latitudinum.

Conſequitur ex conſtructione Propoſitionis ſequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem Undarum.

Conſtituatur Pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem; ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc altiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, qua partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per Prop. XLIV) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini; partes altiſſimæ *A*, *C*, *E*, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum Undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, Unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, adeoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q.E.I.*

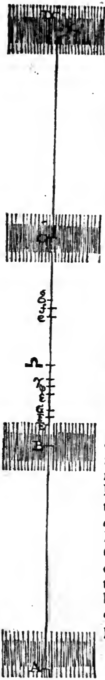
Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{18}$ latæ ſunt, tempore minuti unius ſecundi progrediendo latitudinem ſuam conficient; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ ſpatio pedes 11000 quamproxime.

Corol. 2.

Digitized by Google

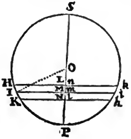
Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in ſubduplicata ratione latitudinis.

Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod partes aquæ recta aſcendunt vel recta deſcendunt; ſed aſcenſus & deſcenſus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac Propoſitione non niſi quamproxime definitum eſſe affirmo.



PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulſibus per Fluidum propagatis, ſingulæ Fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis Penduli.

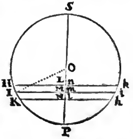


Deſignent *AB*, *BC*, *CD*, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias; *ABC* plagam motus pulſuum ab *A* verſus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria Phyſica Medii quieſcentis, in recta *AC* ad æquales ab invicem diſtantias ſita; *Ee*, *Ff*, *Gg*, ſpatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas Phyſicas ſeu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & ſucceſſive tranſlatas in loca $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Biſecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* deſcribatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus ſuis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipſius partibus proportionalibus; ſic ut completo tempore quovis *PH* vel *PHSh*, ſi demittatur ad *PS* perpendiculum *HL* vel *hl*, & capiatur $E\varepsilon$ æqualis *PL* vel *Pl*, punctum Phyſicum *E* reperiatur

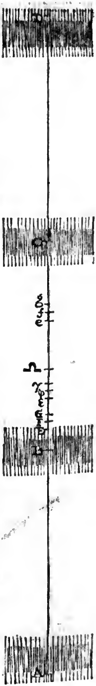
De Motu Corporum

in ϵ. Hac lege punctum quodvis E, eundo ab E per ϵ ad e, & inde redeundo per ϵ ad E, iiſdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes ſingulas peraget cum oſcillante Pendulo. Probandum eſt quod ſingula Medii puncta Phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a cauſa quacunque cieri, & videamus quid inde ſequatur.

In circumferentia $PHSh$ capiantur æquales arcus HI, IK vel hi, ik, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulſuum intervallum totum BC. Et demiſſis perpendiculis IM, KN vel im, kn; quoniam puncta E, F, G motibus ſimilibus ſucceſſive agitantur, & vibrationes ſuas integras ex itu & reditu compoſitas interea peragunt dum pulſus transfertur a B ad C; ſi PH vel $PHSh$ ſit tempus ab initio motus puncti E, erit PI vel $PHSi$ tempus ab initio motus puncti F, & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motus puncti G; & propterea $E\epsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ erunt ipſis PL, PM, PN in itu punctorum, vel



ipſis Pl, Pm, Pn in punctorum reditu, æquales reſpective. Unde $\epsilon\gamma$ ſeu $EG+G\gamma-E\epsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG-LN$, in reditu autem æqualis $EG+ln$. Sed $\epsilon\gamma$ latitudo eſt ſeu expanſio partis Medii EG in loco $\epsilon\gamma$; & propterea expanſio partis illius in itu, eſt ad ejus expanſionem mediocrem, ut $EG-LN$ ad EG; in reditu autem ut $EG+ln$ ſeu $EG+LN$ ad EG. Quare cum ſit LN ad KH ut IM ad radium OP, & KH ad EG ut circumferentia $PHShP$ ad BC, id eſt (ſi ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulſuum BC) ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG, ut IM ad V: erit expanſio partis EG punctive Phyſici F in loco $\epsilon\gamma$, ad expanſionem



panſionem mediocrem quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, ut $V-IM$ ad V in itu, utque $V+im$ ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco $\epsilon\gamma$, eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu vero ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum Phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad Medii vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt, ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut $HL-KN$ ad V, ſi modo (ob anguſtos limites vibrationum) ſupponamus HL & KN indefinite minores eſſe quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium eſt ut $HL-KN$, hoc eſt (ob proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, dataſque HK & OP) ut OM; id eſt, ſi Ff biſecetur in Ω, ut $\Omega\varphi$. Et eodem argumento differentia virium elaſticarum punctorum Phyſicorum ϵ & γ, in reditu lineolæ Phyſicæ $\epsilon\gamma$ eſt ut $\Omega\varphi$. Sed differentia illa (id eſt, exceſſus vis elaſticæ puncti ϵ ſupra vim elaſticam puncti γ,) eſt vis qua interjecta Medii lineola Phyſica $\epsilon\gamma$ acceleratur; & propterea vis acceleratrix lineolæ Phyſicæ $\epsilon\ \gamma$, eſt ut ipſius diſtantia a medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) recte exponitur per arcum PI; & Medii pars linearis $\epsilon\gamma$ lege præſcripta movetur, id eſt, lege oſcillantis Penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. *Q.E.D.*

Corol. Hinc patet quod numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola Phyſica $\epsilon\gamma$, quamprimum ad locum ſuum primum redierit, quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur quamprimum pulſus a corpore tremulo propagari deſinunt.

Digitized by Google

De Motu Corporum

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulſuum in Fluido Elaſtico propagatorum velocitates, ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione vis Elaſticæ directe & ſubduplicata ratione denſitatis inverſe; ſi modo Fluidi vis Elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.

Caſ. 1. Si Media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his Mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno Medio intenſior ſit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Verum tamen niſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro Phyſice accurata haberi poteſt. Sunt autem vires Elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes, itus & reditus ſuos per ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proxime præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi Media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, eſt ut pulſuum latitudo; & in eadem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Eſtque tempus itus & reditus unius in ratione compoſita ex ratione ſubduplicata materiæ & ratione ſubduplicata ſpatii, atque adeo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

Caſ 3. In Mediis igitur denſitate & vi Elaſtica paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quod ſi Medii vel denſitas vel vis Elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; tempus quo motus

Digitized by Google

tus iidem peragantur ac prius, augebitur in ſubduplicata ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicata ratione vis Elaſticæ. Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ratione ſubduplicata denſitatis Medii inverſe & ratione ſubduplicata vis Elaſticæ directe. *Q. E. D.*

Hæc Propoſitio ulterius patebit ex conſtructione ſequentis.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis Medii denſitate & vi Elaſtica, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris noſtri comprimi; ſitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore Pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.

Nam ſtantibus quæ in Propoſitione XLVII conſtructa ſunt, ſi linea quævis Phyſica EF, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium PS, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis P & S, a vi Elaſtica quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora ſint in ſubduplicata ratione longitudinis Pendulorum, & longitudo Penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicata ratione longitudinis $\frac{1}{2} PS$ ſeu PO ad longitudinem A. Sed vis Elaſtica qua lineola Phyſica EG, in locis ſuis extremis P, S exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione Propoſitionis XLVII) ad ejus vim totam Elaſticam ut $HL - KN$ ad V, hoc eſt (cum punctum K jam incidat in P) ut HK ad V: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem EG; adeoque ex æquo, vis qua lineola EG in locis ſuis P & S urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$, ſive ut $PO \times A$ ad VV, nam HK erat ad EG ut

PO

PO ad V. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciproce in ſubduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elaſtica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in ſubduplicata ratione VV ad $PO \times A$, atque adeo ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicata ratione VV ad $PO \times A$, & ſubduplicata ratione *PO* ad A conjunctim; id eſt, in ratione integra V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam *BC*. Ergo tempus quo pulſus percurrit ſpatium *BC*, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id eſt, ut *BC* ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium *BC*, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt quam acquirunt Gravia, æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſita, pulſus percurret ſpatium quod erit æquale toti altitudini A, adeoque tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A deſcripti: eſt enim tempus caſus ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A ſit ut Fluidi vis Elaſtica directe & denſitas ejuſdem inverſe; velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione denſitatis inverſe & ſubduplicata ratione vis Elaſticæ directe.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa erit pulſus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scholium.

Spectant Propoſitiones noviſſimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur ſecundum lineas rectas, in actione ſola

(per

(per Prop. XLI. & XLII.) conſiſtere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud ſunt quam aeris pulſus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, ſi modo vehementes ſint & graves, quales ſunt ſoni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & ſonos quoſvis, in chordas corporibus ſonoris uniſonas impactos, excitare tremores notiſſimum eſt. Confirmatur etiam ex velocitate ſonorum. Nam cum pondera ſpecifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi Mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum Aeris & aquæ pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera ſpecifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis, cujus pondus aerem noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa quam in conſtructione ſuperioris Problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti circumferentia eſt pedum 186768. Et cum Pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum, oſcillationem ex itu & reditu compoſitam, tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, abſolvat; Pendulum pedes 29725, ſeu digitos 356700 longum, oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum $190\frac{3}{4}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore ſonus progrediendo conficiet pedes 186768, adeoque tempore minuti unius ſecundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio craſſitudinis ſolidarum particularum aeris, per quam ſonus utique propagatur in inſtanti. Cum pondus aeris ſit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & ſales ſint fere duplo denſiores quam aqua; ſi particulæ aeris ponantur eſſe ejuſdem circiter denſitatis cum particulis vel aquæ vel ſalium, & raritas aeris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aeris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979 quos ſonus tempore minuti unius ſecundi juxta calculum ſuperiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$ ſeu 109 circiter, ob craſſitudinem particularum aeris: & ſic ſonus tempore minuti unius ſecundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aere latentes, cum ſint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aeris veri quo ſoni propagantur. His autem quieſcentibus, motus

Digitized by Google

De Motu Corporum tus ille celerius propagabitur per ſolum aerem verum, idque in ſubduplicata ratione minoris materiæ. Ut ſi Atmoſphæra conſtet ex decem partibus aeris veri & una parte vaporum, motus ſonorum celerior erit in ſubduplicata ratione 11 ad 10, vel in integra circiter ratione 21 ad 20, quam ſi propagaretur per undecim partes aeris veri: ideoque motus ſonorum ſupra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto ſonus, tempore minuti unius ſecundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita ſe habere debent tempore verno & autumnali, ubi aer per calorem temperatum rareſcit & ejus vis elaſtica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aer per frigus condenſatur, & ejus vis elaſtica remittitur, motus ſonorum tardior eſſe debet in ſubduplicata ratione denſitatis; & viciſſim æſtivo tempore debet eſſe velocior.

Conſtat autem per experimenta quod ſoni tempore minuti unius ſecundi eundo, conficiunt pedes *Londinenſes* plus minus 1142, *Pariſienſes* vero 1070.

Cognita ſonorum velocitate innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. Invenit utique *D. Sauveur* (factis a ſe experimentis) quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum *Pariſienſium* plus minus quinque, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ quæ tempore minuti unius ſecundi centies recurrit. Sunt igitur pulſus plus minus centum in ſpatio pedum *Pariſienſium* 1070, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi percurrit; adeoque pulſus unus occupat ſpatium pedum *Pariſienſium* quaſi $10\frac{7}{10}$, id eſt, duplam circiter longitudinem fiſtulæ. Unde verſimile eſt quod latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis, æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

Porro cur ſoni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutius audiuntur ubi longiſſime diſtamus a corporibus ſonoris, quam cum proxime abſumus, patet ex Corollario Propoſitionis XLVII Libri hujus. Sed & cur ſoni in Tubis ſtenterophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus a cauſa generante augeri ſolet. Motus autem in Tubis dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea a motu novo ſingulis recurſibus impreſſo, magis augetur. Et hæc ſunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECTIO

Digitized by Google

SECTIO IX.

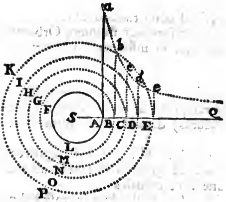
De motu Circulari Fluidorum.

HYPOTHESIS.

REſiſtentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem eſſe velocitati, qua partes Fluidi ſeparantur ab invicem.

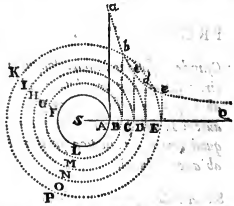
PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si Cylindrus ſolidus infinite longus in Fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in orbem, perſeveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium Fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe Cylindri.



Sit *AFL* Cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur Fluidum in Orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt Fluidum, impreſſiones contiguorum Orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per Hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in Orbem aliquem major eſt vel

minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impreſſio fortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inverſe ut ſuperficies, hoc eſt, inverſe ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directe & diſtantiæ inverſe; hoc eſt (conjunctis rationibus) ut quadrata diſtantiarum inverſe. Quare ſi ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciproce proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id eſt, ſi ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum, Orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ Hyperbolicæ his ſummis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis *D* reciproce ut area *DdQ*, hoc eſt, (per notas Curvarum quadraturas) directe ut diſtantia *SD*. *Q.E.D.*



Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi ſunt reciproce ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum

tionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo: erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi Syſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Corol. 5. Igitur ſi fluido & cylindro exteriore quieſcentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius deſinet augeri quam fluidi partes ſingulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum ſuum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior niſi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad uſque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur inter ſe. Quod ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & niſi cylindrus interior vi aliqua extrinſecus impreſſa motum illum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

Quæ omnia in Aqua profunda ſtagnante experiri licet.

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si Sphæra ſolida, in Fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in orbem; perſeveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium Fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro Sphæræ.

Cas. 1. Sit *AFL* Sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM, CHN, DIO, EKP,* &c.

 diſtin-

diſtinguatur Fluidum in Orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis. Finge autem Orbes illos eſſe ſolidos; & quoniam homogeneum eſt Fluidum, impreſſiones contiguorum Orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per Hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in Orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impeſſio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unuſquiſque in motu ſuo perſeveret uniformiter, debebunt impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem; erunt tranſlationes inverſe ut ſuperficies, hoc eſt, inverſe ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum à centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directe & diſtantiæ inverſe; hoc eſt (conjunctis rationibus) ut cubi diſtantiarum inverſe. Quare ſi ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciproce proportionalia, erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id eſt (ſi ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ Hyperbolicæ his ſummis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum Orbis cujuſvis *DIO* reciproce ut area *DdQ*, hoc eſt, (per notas Curvarum quadraturas) directe ut quadratum diſtantiæ *SD*. Id quod volui primo demonſtrare.

Cas. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis ſe mutuo ſuperantes; & his rectis circa axem revolutis concipe Orbes in annulos innumeros ſecari; & annulus unuſquiſque habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque, niſi in motu juxta legem caſus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonſtratione caſus primi. Et propterea annulorum ſeries quælibet

a Globo

Digitized by Google

a Globo in infinitum recta pergens, movebitur pro lege caſus primi, niſi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus eſt; neque adeo motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui a centro æqualiter diſtant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quam juxta æquatorem; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat ſecundum legem caſus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt, annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum à centro Globi. Quod volui ſecundo demonſtrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolute & uniformiter fluidam; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motus circularis, ſed ad conſtitutionem Fluidi ſolummodo conducunt, perſeverabit motus circularis ut prius. His ſectionibus annuli omnes quam minimi aſperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q.E.D.* Cæterum cum motus circularis, & abinde orta vis centrifuga, major ſit ad Eclipticam quam ad Polos; debebit cauſa aliqua adeſſe qua particulæ ſingulæ in circulis ſuis retineantur; ne materia quæ ad Eclipticam eſt, recedat ſemper à centro & per exteriora Vorticis migret ad Polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum à centro globi, & velocitates abſolutæ reciproce ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quieſcente ſimilari & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iſte paulatim propagabitur in infinitum; neque prius ceſſabit in ſingulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica ſingularum partium ſint ut quadrata diſtantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem ſuam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipſis ea actione

Digitized by Google

one perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul transferunt, eaque actione ſervant quantitatem motus ſui plane invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ abſorbetur. Materia inter ſphæricas duas quaſvis ſuperficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert ſemper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conſervationem Vorticis conſtanter in eodem movendi ſtatu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem ſemper quantitatem motus accipiat, quam imprimit in materiam Vorticis. Abſque tali principio neceſſe eſt ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim & in orbem agi deſinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipſius centro diſtantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in Vorticem: & primo revolveretur hic Vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum Vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu Vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuo ob motum illum circularem fugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, langueſceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. aſſignatam) & Vortices tandem conquieſcerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes poſitione datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent Vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli, eadem ratione qua unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde Vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuo paulatim excurrent; globique per actiones Vorticum in ſe mutuo, perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in Corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe

poſitionem

poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet & in Vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in Vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quam ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro Vorticis. Alia nulla Vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi reſpectu plani hujus, erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum à centro globi.

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem, data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi Syſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per Corol. 8. Et motus iſti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neque prius deſinent fluidum & vas accelerari, quam ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod ſi vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad ſtatum motus in Corollariis 8. 9 & 10. definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde vero ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus

Digitized by Google

motibus revolvebantur, permittatur Syſtema totum Legibus Mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante fluido, neque motus ſuos in ſe mutuo per fluidum propagare prius ceſſabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & Syſtema totum ad inſtar corporis unius ſolidi ſimul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materia quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, adeoque motum tardius recipiet & longius propagabit quam pro ratione ſuperius aſſignata. Si figura vaſis non ſit Sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus ſed conformibus eidem vaſis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium diſtantiarum à centro quamproxime. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora ſunt ſpatia, tardiores erunt motus, ubi anguſtiora velociores, neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim deſcribent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longius a centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio Vorticum innoteſcit per Propoſitionis hujus Corollarium ſextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſiqua ratione Phænomena cœleſtia per Vorti-

Digitized by Google

Vortices explicari poſſint. Nam Phænomenon eſt, quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utriſque quam accuratiſſime, quatenus obſervationes Aſtronomicæ hactenus prodidere. Ideoque ſi Planetæ illi à Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata diſtantiarum a centro motus: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, niſi vel materia Vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat a centro, vel reſiſtentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi ſeparantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea eſt in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi conſentaneum videtur. Partes craſſiores & minus fluidæ (niſi graves ſint in centrum) circumferentiam petent; & veriſimile eſt quod, etiamſi Demonſtrationum gratia Hypotheſin talem initio Sectionis hujus propoſuerim ut Reſiſtentia velocitati proportionalis eſſet, tamen Reſiſtentia in minori ſit ratione quam ea velocitatis eſt. Quo conceſſo, tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quam duplicata ratione diſtantiarum ab ipſius centro. Quod ſi Vortices (uti aliquorum eſt opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius uſque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio ſeſquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere poteſt. Viderint itaque Philoſophi quo pacto Phænomenon illud rationis ſeſquiplicatæ per Vortices explicari poſſit.

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt, ejuſdem ſunt denſitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipſius partibus (quoad velocitatem & curſus determinationem) moventur.

Nam ſi Vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ ſeu puncta phyſica datum ſervant ſitum inter ſe, congelari ſupponatur: hæc, quoniam neque quoad denſitatem ſuam, neque quoad vim inſitam aut figuram ſuam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: &

 contra,

Digitized by Google

contra, ſi Vorticis pars congelata & ſolida ejuſdem ſit denſitatis cum reliquo Vortice, & reſolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, niſi quatenus ipſius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter ſe. Negligatur igitur motus particularum inter ſe, tanquam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium a centro æqualiter diſtantium, propterea quod ſolidum in Fluidum reſolutum fit pars Vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo ſolidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quieſcens. Sin denſius ſit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quam prius; adeoque Vorticis vim illam, qua prius in Orbita ſua tanquam in æquilibrio conſtitutum retinebatur, jam ſuperans, recedet a centro & revolvendo deſcribet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi à centro Vorticis æqualiter diſtantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo ſolidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem ſemper redit, relative quieſcit in fluido cui innatat.

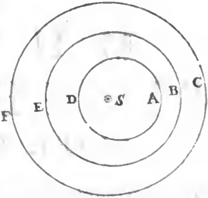
Corol. 2. Et ſi Vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro Vorticis diſtantiam revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ ſecundum Hypotheſin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipſibus umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent *AD*, *BE*, *CF*, Orbes tres circa Solem *S* deſcriptos, quorum extimus *CF* circulus ſit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia ſint *A*, *B* & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in Orbe *CF*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales deſcribendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, ſecundum leges Aſtronomicas; cum tamen ſecundum leges Mechanicas materia Vorticis in ſpatio anguſtiore inter *A* & *C*

velocius

velocius moveri debeat quam in ſpatio latiore inter *D* & *F*; id eſt, in Aphelio velocius quam in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quam in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hac Materia cœleſti relative quieſcens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quam minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quam minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quam in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quam in principio Piſcium. Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo vero motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate plenius docebitur.



DE MUNDI SYSTEMATE

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maxime ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi Scholiis quibuſdam Philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maxime fundari videtur, uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Supereſt ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem Syſtematis Mundani. De hoc argumento compoſueram Librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus Principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minime percipient, neque præjudicia deponent quibus a multis retro annis inſueverunt: & propterea ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in Propoſitiones, more Mathematico, ut ab iis ſolis legantur qui Principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propoſitiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematice doctis moram nimiam injicere poſſint, author eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis Definitiones, Leges motuum & ſectiones tres priores Libri primi ſedulo legat, dein tranſeat ad hunc Librum de Mundi Syſtemate, & reliquas Librorum priorum Propoſitiones hic citatas pro lubitu conſulat.

REGULÆ

Digitized by Google

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I.

Cauſas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ ſint & earum Phænomenis explicandis ſufficiant.

Dicunt utique Philoſophi: Natura nihil agit fruſtra, & fruſtra fit per plura quod fieri poteſt per pauciora. Natura enim ſimplex eſt & rerum cauſis ſuperfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideoque Effectuum naturalium ejuſdem generis eædem ſunt Cauſæ.

Uti reſpirationis in Homine & in Beſtia; deſcenſus lapidum in *Europa* & in *America*; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis Lucis in Terra & in Planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendæ ſunt.

Nam qualitates corporum non niſi per experimenta innoteſcunt, ideoque generales ſtatuendæ ſunt quotquot cum experimentis generaliter quadrant; & quæ minui non poſſunt, non poſſunt auferri. Certe contra experimentorum tenorem ſomnia temere confingenda non ſunt, nec a Naturæ analogia recedendum eſt, cum ea

Digitized by Google

ca ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur. Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius a duritie partium, & inde non horum tantum corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras merito concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius, oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras eſſe & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc eſt fundamentum Philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas & ſibi mutuo contiguas ab invicem ſeparari poſſe, ex Phænomenis novimus, & partes indiviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe ex Mathematica certum eſt. Utrum vero partes illæ diſtinctæ & nondum diviſæ per vires Naturæ dividi & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento quod particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: concluderemus vi hujus Regulæ, quod non ſolum partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quod indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Denique ſi corpora omnia in circuitu Terræ gravia eſſe in Terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & Lunam gravem eſſe in Terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in Lunam, & Planetas omnes graves eſſe in ſe mutuo, & Cometarum ſimilem eſſe gravitatem, per experimenta & obſervationes Aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit per hanc Regulam quod corpora omnia in ſe mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex Phænomenis de gravitate univerſali, quam de corporum impenetrabilitate: de qua utique in corporibus Cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus.

PHÆNO-

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

Planetas Circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica eſſe in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum ab ipſius centro.

COnſtat ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt ſenſibiliter a circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica eſſe in ſeſquiplicata ratione ſemidiametrorum Orbium conſentiunt Aſtronomi; & idem ex Tabula ſequente manifeſtum eſt.

Satellitum Jovialium tempora periodica.

$1^d.18^h.27'.34''$. $3^d.13^h.13'.42''$. $7^d.3^h.42'.36''$. $16^d.16^h.32'.9''$.

Diſtantiæ Satellitum a centro Jovis.

Ex obſervationibus	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis
Townlei *per Microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Caſſini *per Teleſcop.*	5	8	13	23	
Caſſini *per Eclipſ. Satell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Ex temporibus periodicis.	5,667	9,017	14,384	25,299	

PHÆNOMENON II.

Planetas Circumſaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica eſſe in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum ab ipſius centro.

Caſſinus utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum a centro Saturni & periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

Satelli-

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

$1^d.21^h.19'$. $2^d.17^h.41'$. $4^d.13^h.47'$. $15^d.22^h.41'$. $79^d.22^h.4'$.

Diſtantiæ Satellitum a centro Saturni in ſemidiametris Annuli.

Ex obſervationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis	1,95.	2,5.	3,52,	8,09.	23,71.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus ſuis Solem cingere.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phaſibus lunaribus demonſtratur. Plena facie lucentes ultra Solem ſiti ſunt, dimidiata è regione Solis, falcata cis Solem; per diſcum ejus ad modum macularum nonnunquam tranſeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibboſa in quadraturis, certum eſt quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phaſibus ſemper plenis demonſtratur.

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica eſſe in ratione ſeſquiplicata mediocrium diſtantiarum à Sole.

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confeſſo eſt apud omnes. Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemque orbium dimenſiones, ſive Sol circa Terram, ſive Terra circa Solem revolvatur. Ac de menſura quidem temporum periodicorum convenit inter Aſtronomos univerſos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſime ex Obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in Tabula ſequente videre licet.

Plane-

Digitized by Google

Planetarum ac Telluris diſtantiæ mediocres à Sole.

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	953806.	520116.	152399.	100000.	72333.	38710.

De diſtantiis Mercurii & Veneris a Sole diſputandi non eſt locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum Planetarum à Sole tollitur omnis diſputatio per Eclipſes Satellitum Jovis. Etenim per Eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter ſe collatis determinatur diſtantia Jovis.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas deſcribere temporibus minime proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam reſpectu Terræ nunc progrediuntur, nunc ſtationarii ſunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis reſpectu ſemper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, ſed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, ſic ut arearum æquabilis ſit deſcriptio. Propoſitio eſt Aſtronomis notiſſima, & in Jove apprime demonſtratur per Eclipſes Satellitum, quibus Eclipſibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudines & diſtantias à Sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem deſcribere.

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipſius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, ſed errorum inſenſibiles minutias in hiſce Phænomenis negligo.

Digitized by Google

De Mundi Systemate

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus Planetæ Circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in Orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

PAtet pars prior Propoſitionis per Phænomenon primum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam Libri primi: & pars poſterior per Phænomenon primum, & Corollarium ſextum Propoſitionis quartæ ejuſdem Libri.

Idem intellige de Planetis qui Saturnum comitantur, per Phænomenon ſecundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus ſuis retinentur, reſpicere Solem, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Phænomenon quintum, & Propoſitionem ſecundam Libri primi: & pars poſterior per Phænomenon quartum, & Propoſitionem quartam ejuſdem Libri. Accuratiſſime autem demonſtratur hæc pars Propoſitionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib I.) motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PRO-

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim qua Luna retinetur in Orbe ſuo reſpicere Terram, & eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Patet aſſertionis pars prior per Phænomenon ſextum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam Libri primi: & pars poſterior per motum tardiſſimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantum trium & minutorum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) quod ſi diſtantia Lunæ a centro Terræ ſit ad ſemidiametrum Terræ ut D ad 1; vis a qua motus talis oriatur ſit reciproce ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id eſt, reciproce ut ea ipſius D dignitas cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt, in ratione diſtantiæ paulo majore quam duplicata inverſe, ſed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione Solis (uti poſthac dicetur) & propterea hic negligendus eſt. Actio Solis quatenus Lunam diſtrahit a Terra, eſt ut diſtantia Lunæ a Terra quamproxime; ideoque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. I.) eſt ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglecta Solis vi tantilla, vis reliqua qua Luna retinetur in Orbe erit reciproce ut D^2. Id quod etiam plenius conſtabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propoſitione ſequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris qua Luna retinetur in Orbe, augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicata ſemidiametri Terræ ad mediocrem diſtantiam centri Lunæ a centro Terræ: habebitur vis centripeta Lunaris ad ſuperficiem Terræ, poſito quod vis illa deſcendendo ad ſuperficiem Terræ, perpetuo augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicata.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitare in Terram, & vi gravitatis retrahi ſemper a motu rectilineo, & in Orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris a Terra in Syzygiis eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum pleroſque Aſtronomorum 59, ſecundum *Vendelinum* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, & ſecundum *Ty-*

De Mundi Systemate *chonem* $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam Fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin Lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, fere ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum; & Lunarem periodum reſpectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum Terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti a *Gallis* menſurantibus definitum eſt: Et ſi Luna motu omni privari fingatur ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe ſuo retinetur, deſcendat in Terram; hæc ſpatio minuti unius primi cadendo deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc ex calculo vel per Propoſitionem XXXVI. Libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propoſitionis quartæ ejuſdem Libri, confecto. Nam arcus illius quem Luna tempore minuti unius primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter. Unde cum vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicata diſtantiæ ratione inverſa, adeoque ad ſuperficiem Terræ major ſit partibus 60×60 quam ad Lunam; corpus vi illa in regionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$. Atqui corpora in regionibus noſtris vi gravitatis cadendo, deſcribunt tempore minuti unius ſecundi pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$, uti *Hugenius* factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonſtravit: & propterea (per Reg. I. & II.) vis qua Luna in Orbe ſuo retinetur, illa ipſa eſt quam nos Gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi Gravitas ab ea diverſa eſt, corpora viribus utriſque conjunctis Terram petendo, duplo velocius deſcendent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcribent pedes Pariſienſes $30\frac{1}{6}$: omnino contra Experientiam.

Calculus hic fundatur in hypotheſi quod Terra quieſcit. Nam ſi Terra & Luna circum Solem moveantur, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: diſtantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium; uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) ineunti patebit.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas Circumjoviales gravitare in Jovem, Circumſaturnios in Saturnum, & Circumſolares in Solem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in Orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, Circumſaturniorum circa Saturnum, & Mercurii ac Veneris reliquorumque Circumſolarium circa Solem ſunt Phænomena ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Reg. II. à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cum demonſtratum ſit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, & recedendo à Jove, Saturno & Sole decreſcant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terra.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove & Saturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis (per motus Legem tertiam) mutua ſit, Jupiter in Satellites ſuos omnes, Saturnus in ſuos, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Corol. 3. Graves ſunt Planetæ omnes in ſe mutuo per Corol. 1. & 2. Et hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus Lunares, Sol & Luna perturbant Mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Deſcenſus gravium omnium in Terram (dempta ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus tempo-

Digitized by Google

temporibus fieri, jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſime quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in Auro, Argento, Plumbo, Vitro, Arena, Sale communi, Ligno, Aqua, Tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam Ligno, & idem Auri pondus ſuſpendebam (quam potui exacte) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram, & aeris reſiſtentiam omnino paria: Et paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant una & redibant diutiſſime. Proinde copia materiæ in Auro (per Corol. 1. & 6. Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in Ligno, ut vis motricis actio in totum Aurum ad ejuſdem actionem in totum Lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quam pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſto deprehendi potuit. Jam vero naturam gravitatis in Planetas eandem eſſe atque in Terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terreſtria ad uſque Orbem Lunæ, & una cum Luna motu omni privata demitti, ut in Terram ſimul cadant; & per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum Luna, adeoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum à centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciproce ut quadrata diſtantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus a Jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus, in hac Terra noſtra. Et eodem argumento Planetæ circumſolares ab æqualibus à Sole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole diſtantiis) Satelles aliquis gravior eſſet in Solem pro quantitate

titate materiæ ſuæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione ſubduplicata quam proxime; uti calculis quibuſdam initis inveni. Et ſi Satelles minus gravis eſſet in Solem in ratione illa *d* ad *e*, diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quam diſtantia centri Jovis à Sole in ratione illa ſubduplicata. Igitur ſi in æqualibus à Sole diſtantiis, gravitas acceleratrix Satellitis cujuſvis in Solem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum milleſima gravitatis totius; foret diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quam diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quinta diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis eccentricitas fore valde ſenſibilis. Sed Orbes Satellitum ſunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera Saturni & Comitum ejus in Solem, in æqualibus à Sole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accurate proportionalia. Aliqua autem ſunt per Corol. 1. & 3. Prop. v.

Quinetiam pondera partium ſingularum Planetæ cujuſque in alium quemcunque, ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: Planeta totus, pro genere partium quibus maxime abundet, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora Terreſtria, quæ apud nos ſunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera eſſent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera vero partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra Experientiam.

Corol.

Corol. 2. Corpora univerſa quæ circa Terram ſunt, gravia ſunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per Reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si Æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in forma materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis quæ, pro quantitate materiæ, quam maxime gravitant, & viciſſim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in Corollario ſuperiore.

Corol. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecifice graviora ſint, minime deſcendunt. Quod ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque abſque poris rareſieri poſſint, Vacuum datur. Ejuſdem denſitatis eſſe dico, quarum vires inertiæ ſunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis gravitatis diverſi eſt generis à vi magnetica. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi poteſt & remitti, eſtque nonnunquam longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, & in receſſu à Magnete decreſcit in ratione diſtantiæ non duplicata, ſed fere triplicata, quantum ex craſſis quibuſdam obſervationibus animadvertere potui.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora univerſa fieri, eamque proportionalem eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Planetas omnes in ſe mutuo graves eſſe jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque ſeorſim ſpectatum eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde conſequens eſt, (per Prop. LXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem eſſe materiæ in iiſdem.

Porro cum Planetæ cujuſvis *A* partes omnes graves ſint in Planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujuſque ſit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis ſit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* viciſſim gravitabit, & erit gravitas ſua in partem unamquamque ad gravitatem ſuam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q.E.D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes ſingulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes ſingulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos ſunt, hac lege gravitare deberent in ſe mutuo, cum tamen ejuſmodi gravitas neutiquam ſentiatur: Reſpondeo quod gravitas in hæc corpora, cum ſit ad gravitatem in Terram totam ut ſunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor eſt quam quæ ſentiri poſſit.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si Globorum duorum in ſe mutuo gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum diſtantiæ inter centra.

Poſtquam inveniſſem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciproce proportionalem quadratis diſtantiarum a partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus pluribus compoſita, an vero quam proxime. Nam fieri poſſet ut proportio, quæ in majoribus diſtantiis ſatis accurate obtineret, prope ſuperficiem Planetæ ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per Prop. LXXV. & LXXVI. Libri primi & ipſarum Corollaria, intellexi veritatem Propoſitionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium ſunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directe & quadrata temporum periodicorum inverſe; & pondera ad ſuperficies Planetarum, aliaſve quaſvis a centro diſtantias, majora ſunt vel minora (per hanc Propoſitionem) in duplicata ratione diſtantiarum inverſa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, Satellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, Satellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & Lunæ circum Terram dierum 27, hor. 7. min. 43, collatis cum diſtantia mediocri Veneris a Sole & cum elongationibus maximis heliocentricis Satellitis extimi circumjovialis a centro Jovis 8'. $21\frac{1}{2}$'', Satellitis Hugeniani a centro Saturni 3'. 20'', & Lunæ a Terra 10', computum ineundo inveni quod corporum æqualium & a Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter diſtantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ reſpective. Eſt enim parallaxis Solis ex obſervationibus noviſſimis quaſi 10'', & *Halleius* noſter per emerſiones Jovis & Satellitum e parte obſcura

Lunæ,

Lunæ, determinavit quod elongatio maxima heliocentrica Satellitis extimi Jovialis a centro Jovis in mediocri Jovis a Sole diſtantia ſit 8′. 21½″, & diameter Jovis 41″. Ex duratione Eclipſeon Satellitum in umbram Jovis incidentium prodit hæc diameter quaſi 40″, atque adeo ſemidiameter 20″. Menſuravit autem *Hugenius* elongationem maximam heliocentricam Satellitis a ſe detecti 3′. 20″ a centro Saturni, & hujus elongationis pars quarta, nempe 50″, eſt diameter annuli Saturni e Sole viſi, & diameter Saturni eſt ad diametrum annuli ut 4 ad 9, ideoque ſemidiameter Saturni e Sole viſi eſt 11″. Subducatur lux erratica quæ haud minor eſſe ſolet quam 2″ vel 3″: Et manebit ſemidiameter Saturni quaſi 9″. Ex hiſce autem & Solis ſemidiametro mediocri 16′. 6″ computum ineundo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ ſemidiametri ad invicem ut 10000, 1077, 889 & 104. Unde, cum pondera æqualium corporum a centris Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter diſtantium, ſint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram, ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ reſpective, & auctis vel diminutis diſtantiis pondera diminuantur vel augeantur in duplicata ratione: pondera æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in diſtantiis 10000, 1077, 889, & 104 ab eorum centris, atque adeo in eorum ſuperficiebus, erunt ut 10000, 835, 525, & 410 reſpective. Quanta ſint pondera corporum in ſuperficie Lunæ dicemus in ſequentibus.

Corol. 2. Innoteſcit etiam quantitas materiæ in Planetis ſingulis. Nam quantitates materiæ in Planetis ſunt ut eorum vires in æqualibus diſtantiis ab eorum centris, id eſt, in Sole, Jove, Saturno ac Terra ſunt ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ reſpective. Si parallaxis Solis ſtatuatur major vel minor quam 10″, debebit quantitas materiæ in Terra augeri vel diminui in triplicata ratione.

Corol. 3. Innoteſcunt etiam denſitates Planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in Sphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus Sphærarum ut Sphærarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera illa applicata ad Sphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 1077, 889, & 104, & pondera in eoſdem ut 10000, 835, 525, & 410, & propterea denſitates ſunt ut 100, 78, 59, & 396. Denſitas Terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi Solis, ſed determinatur per parallaxin Lunæ, & prop-

 terea

Digitized by Google

terea hic recte definitur. Eſt igitur Sol paulo denſior quam Jupiter, & Jupiter quam Saturnus, & Terra quadruplo denſior quam Sol. Nam per ingentem ſuum calorem Sol rareſcit. Luna vero denſior eſt quam Terra, ut in ſequentibus patebit.

Corol. 4. Denſiores igitur ſunt Planetæ qui ſunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & denſiores ſunt Planetæ, cæteris paribus, qui ſunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, & Terra Jove. In diverſis utique diſtantiis a Sole collocandi erant Planetæ ut quilibet pro gradu denſitatis calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua noſtra, ſi Terra locaretur in orbe Saturni, rigeſceret, ſi in orbe Mercurii in vapores ſtatim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis eſt, ſeptuplo denſior eſt in orbe Mercurii quam apud nos: & Thermometro expertus ſum quod ſeptuplo Solis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium vero non eſt quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hac noſtra; cum materia omnis denſior ad operationes Naturales obeundas majorem calorem requirat.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo a ſuperficiebus Planetarum deorſum decreſcere in ratione diſtantiarum a centro quam proxime.

Si materia Planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc Propoſitio accurate: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus Planetarum in Cœlis diutiſſime conſervari poſſe.

In Scholio Propoſitionis XL. Lib. II. oſtenſum eſt quod globus Aquæ congelatæ in Aere noſtro, libere movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentia Aeris amitteret motus ſui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proxime in globis utcunque magnis & velocibus. Jam vero Globum Terræ noſtræ denſiorem eſſe quam ſi totus ex Aqua conſtaret, ſic colligo. Si Globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quam aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent.

rent. Eaque de cauſa Globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſita. Et par eſt ratio Terræ noſtræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in regionem oppoſitam confluentibus. Eodem argumento maculæ Solares leviores ſunt quam materia lucida Solaris cui ſupernatant. Et in formatione qualicunque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore maſſa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis ſuprema quaſi duplo gravior ſit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quaſi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: veriſimile eſt quod copia materiæ totius in Terra quaſi quintuplo vel ſextuplo major ſit quam ſi tota ex aqua conſtaret; præſertim cum Terram quaſi quintuplo denſiorem eſſe quam Jovem jam ante oſtenſum ſit. Igitur ſi Jupiter paulo denſior ſit quam aqua, hic ſpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, amitteret in Medio ejuſdem denſitatis cum Aere noſtro motus ſui partem fere decimam. Verum cum reſiſtentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ partibus $13\frac{2}{3}$ levior eſt quam argentum vivum, minus reſiſtat in eadem ratione; & aer, qui partibus 850 levior eſt quam aqua, minus reſiſtat in eadem ratione: ſi aſcendatur in cœlos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit.

HYPOTHESIS I.

Centrum Syſtematis Mundani quieſcere.

Hoc ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui Terram alii Solem in centro Syſtematis quieſcere contendant. Videamus quid inde ſequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quieſcere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quieſcet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo ſemper pro-

De Mundi Systemate progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypotheſin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, ſed nunquam longe recedere a communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cum (per Corol. 2. Prop. VIII.) materia in Sole ſit ad materiam in Jove ut 1033 ad 1, & diſtantia Jovis a Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis Jovis & Solis in punctum paulo ſupra ſuperficiem Solis. Eodem argumento cum materia in Sole ſit ad materiam in Saturno ut 2411 ad 1, & diſtantia Saturni a Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo minore: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra ſuperficiem Solis. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro a centro Solis diſtaret. Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quieſcit, Sol pro vario Planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum eſt. Nam cum Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in ſe mutuo, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motus perpetuo agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro Mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, a quo centrum Solis quam minime diſcedit, & a quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modo Sol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes a priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro Solis; ſi Sol quieſceret & Planetæ reliqui non agerent in ſe mutuo, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. I. Prop. XIII Lib. I.) Actiones autem Planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus Planetarum in Ellipſibus circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quam ſi motus iſti circa Solem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem eſt ad gravitatem in Solem (paribus diſtantiis) ut 1 ad 1033; adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam diſtantia Saturni a Jove eſt ad diſtantiam Saturni a Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1033 ſeu 1 ad 204 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in ſingulis Planetæ hujus cum Jove conjunctionibus adeo ſenſibilis ut ad eandem Aſtronomi hæreant. Pro vario ſitu Planetæ in his conjunctionibus, Eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur, Aphelium nunc promovetur nunc forte retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum Solem a tanta vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere poteſt conſtituendo umbilicum inferiorem Orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem ſunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 2411}{25}$ ſeu 124986, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum eſt ad gravitatem

Jovis

De Mundi Systemate

Jovis in Solem ut 65 ad 124986 ſeu 1 ad 1923. Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor eſt quam ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longe minores, præterquam quod Orbis Terræ ſenſibiliter perturbatur a Luna. Commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ, Ellipſin circum Solem in umbilico poſitum percurrit, & radio ad Solem ducto areas in eadem temporibus proportionales deſcribit, Terra vero circum hoc centrum commune motu menſtruo revolvitur.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quieſcunt.

Aphelia quieſcunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & Orbium plana, per ejuſdem Libri Prop. I. & quieſcentibus planis quieſcunt Nodi. Attamen a Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in ſe invicem orientur inæqualitates aliquæ, ſed quæ ob parvitatem hic contemni poſſunt.

Corol. 1. Quieſcunt etiam Stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodoſque poſitiones ſervant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla ſit earum parallaxis ſenſibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immenſam corporum diſtantiam nullos edent ſenſibiles effectus in regione Syſtematis noſtri. Quinimo Fixæ in omnes cæli partes æqualiter diſperſæ contrariis attractionibus vires mutuas deſtruunt, per Prop. LXX. Lib. I.

Scholium.

Cum Planetæ Soli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, & Mars) ob corporum parvitatem parum agant in ſe invicem: horum Aphelia & Nodi quieſcent, niſi quatenus a viribus Jovis, Saturni, & corporum ſuperiorum turbentur. Et inde colligi poteſt per theoriam gravitatis, quod horum Aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu fixarum, idque in proportione ſeſquiplicata diſtantiarum horum Planetarum a Sole. Ut ſi Aphelium Martis in annis centum conficiat 35′ in conſequentia reſpectu fixarum; Aphelia Terræ, Veneris, & Mercurii in annis centum conficient 18′. 36″, 11′. 27″, & 4′. 29″ reſpective. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hac Propoſitione.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire Orbium principales diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſubſeſquiplicata temporum periodicorum, per Prop. xv. Lib. I. deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum Solis & Planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum mediæ proportionalium inter ſummam illam & Solem, per Prop. lx. Lib. I.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

Invenire Orbium Eccentricitates & Aphelia.

Problema confit per Prop. xviii. Lib. I.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem Lunæ ex ipſius motu diurno oriri.

Patet per motus Legem I, & Corol. 22. Prop. lxvi. Lib. I. Quoniam vero Lunæ, circa axem ſuum uniformiter revolventis, dies menſtruus eſt; hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipſius ſemper reſpiciet, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde a Terra. Hæc eſt libratio in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta eſt ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porro hæc ita ſe habere, ex Phænomenis manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes Planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.

Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit

Digitized by Google

De Mundi Systemate ascenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (conſentientibus Aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem argumento, niſi Terra noſtra paulo altior eſſet ſub æquatore quam ad polos, Maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Picartus menſurando arcum gradus unius & 22′. 55″ inter *Ambianum* & *Malvoiſinam*, invenit arcum gradus unius eſſe hexapedarum Pariſienſium 57060. Unde ambitus Terræ eſt pedum Pariſienſium 123249600, ut ſupra. Sed cum error quadringenteſimæ partis digiti, tam in fabrica inſtrumentorum quam in applicatione eorum ad obſervationes capiendas, ſit inſenſibilis, & in Sectore decempedali quo *Galli* obſervarunt Latitudines locorum reſpondeat minutis quatuor ſecundis, & in ſingulis obſervationibus incidere poſſit tam ad centrum Sectoris quam ad ejus circumferentiam, & errores in minoribus arcubus ſint majoris momenti: * ideo *Caſſinus* juſſu Regio menſuram Terræ per majora locorum intervalla aggreſſus eſt, & ſubinde per diſtantiam inter Obſervatorium Regium *Pariſienſe* & villam *Colliure* in *Rouſſillon* & Latitudinum differentiam 6 gr. 18′, ſupponendo quod figura Terræ ſit Sphærica, invenit gradum unum eſſe hexapedarum 57292, prope ut *Norwoodus* noſter antea invenerat. Hic enim circa annum 1635, menſurando diſtantiam pedum Londinenſium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & obſervando differentiam Latitudinum 2 gr. 28′, collegit menſuram gradus unius eſſe pedum Londinenſium 367196, id eſt, hexapedarum Pariſienſium 57300. Ob magnitudinem intervalli a *Caſſino* menſurati, pro menſura gradus unius in medio intervalli illius, id eſt, inter Latitudines 45 gr. & 46 gr. uſurpabo hexapedas 57292. Unde, ſi Terra ſit Sphærica, ſemidiameter ejus erit pedum Pariſienſium 19695539.

* Vide Hiſtoriam Academiæ Regiæ ſcientiarum anno 1700.

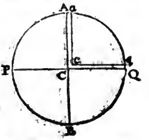
Penduli

Penduli in Latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* ad minuta ſecunda oſcillantis longitudo eſt pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{3}$. Et longitudo quod grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit, eſt ad dimidiam longitudinem penduli hujus, in duplicata ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit *Hugenius*) ideoque eſt pedum Pariſienſium 15, dig. 1, lin. $2\frac{1}{18}$, ſeu linearum $2174\frac{1}{18}$.

Corpus in circulo, ad diſtantiam pedum 19695539 a centro, ſingulis diebus ſidereis horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens, tempore minuti unius ſecundi deſcribit arcum pedum 1436,223, cujus ſinus verſus eſt pedum 0,05236558, ſeu linearum 7,54064. Ideoque vis qua gravia deſcendunt in Latitudine *Lutetiæ*, eſt ad vim centripetam corporum in Æquatore, a Terræ motu diurno oriundam, ut $2174\frac{1}{18}$ ad 7,54064.

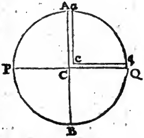
Vis centrifuga corporum in Æquatore, eſt ad vim centrifugam qua corpora directe tendunt a Terra in Latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′, in duplicata ratione Radii ad ſinum complementi Latitudinis illius, id eſt, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim qua gravia deſcendunt in Latitudine *Lutetiæ*, & corpus in Latitudine *Lutetiæ* vi tota gravitatis cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcriberet lineas 2177,32, ſeu pedes Pariſienſes 15, dig. 1, & lin. 5,32. Et vis tota gravitatis in Latitudine illa, erit ad vim centripetam corporum in Æquatore Terræ, ut 2177,32 ad 7,54064, ſeu 289 ad 1.

Unde ſi *APBQ* figuram Terræ deſignet jam non amplius Sphæricam ſed revolutione Ellipſeos circum axem minorem *PQ* genitam, ſitque *ACQqca* canalis aquæ plena, a polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad Æquatorem *Aa* pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, eſſe ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 289 ſuſtinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure ſuſtinebit reliquas. Porro (ex Propoſitionis xci. Corollario ſecundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod ſi Terra conſtaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & eſſet ejus axis *PQ*



De Mundi Systemate

ad diametrum *AB* ut 100 ad 101: gravitas in loco *Q* in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco *Q* in Sphæram centro *C* radio *PC* vel *QC* deſcriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco *A* in Sphæroidem, convolutione Ellipſeos *APBQ* circa axem *AB* deſcriptam, eſt ad gravitatem in eodem loco *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* deſcriptam, ut 125 ad 126. Eſt autem gravitas in loco *A* in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram: propterea quod Sphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AB*, *PQ* perpendicularis eſt, vertitur in dictam Sphæroidem; & gravitas in *A*, in caſu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proxime. Eſt igitur gravitas in *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* deſcriptam, ad gravitatem in *A* in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco *Q* in Sphæram centro *C* radio *QC* deſcriptam, eſt ad gravitatem in loco *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* deſcriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id eſt, ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco *Q* in Terram, ad gravitatem in loco *A* in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, ſeu ut 501 ad 500.



Jam cum (per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis *ACca* vel *QCcq* ſit ut diſtantia locorum a centro Terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure *ACca* ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id eſt, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt, ut 505 ad 501. Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 289, hoc eſt, vis centrifuga quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$, eſt tantum pars $\frac{1}{289}$.

Et

Et propterea dico, ſecundum Regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* ſuperet altitudinem aquæ in crure *QCcq* parte centeſima totius altitudinis: vis centriſuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure *ACca* ſit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter Terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum Terræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Caſſini*, ſit pedum Pariſienſium 19695539, ſeu milliarium 3939 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000) Terra altior erit ad Æquatorem quam ad Polos exceſſu pedum 85820, ſeu milliarum $17\frac{1}{6}$.

Si Planeta major ſit vel minor quam Terra manente ejus denſitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione quamproxime. Et ſi denſitas Planetæ augeatur vel minuatur in ratione quavis, gravitas etiam in ipſum tendens augebitur vel minuetur in eadem ratione, & differentia diametrorum viciſſim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum Terra reſpectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, Jupiter autem horis 9. 56′, ſintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & denſitates ut 5 ad 1: differentia diametrorum Jovis erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{5}{1} \times \frac{1}{229}$ ad 1, ſeu 1 ad 8 quamproxime. Eſt igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut 9 ad 8 quamproxime, & propterea diameter inter polos eſt $35\frac{1}{2}''$. Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod uniformis ſit Planetarum materia. Nam ſi materia denſior ſit ad centrum quam ad circumferentiam; diameter quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Jovis vero diametrum quæ polis ejus interjacet minorem eſſe diametro altera *Caſſinus* dudum obſervavit, & Terræ diametrum inter polos minorem eſſe diametro altera patebit per ea quæ dicentur in Propoſitione ſequente.

PRO-

Digitized by Google

De Mundi Syſtemate

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter ſe comparare Pondera corporum in Terræ hujus regionibus diverſis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia ſunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & ſimiliter in totis ſitarum, ſunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter ſe; erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciproce ut crura, id eſt, reciproce ut 230 ad 229. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciproce ut crura, id eſt, reciproce ut diſtantiæ corporum a centro Terræ. Proinde ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie Terræ conſiſtant; erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut diſtantiæ eorum a centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuſcunque per totam Terræ ſuperficiem regionibus, ſunt reciproce ut diſtantiæ locorum a centro; & propterea, ex Hypotheſi quod Terra Sphærois ſit, dantur proportione.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab Æquatore ad Polos, ſit quam proxime ut ſinus verſus Latitudinis duplicatæ, vel, quod perinde eſt, ut quadratum ſinus recti Latitudinis. Et in eadem circiter ratione augentur arcus graduum Latitudinis in Meridiano. Ideoque cum Latitudo *Lutetiæ Pariſiorum* ſit 48 gr. 50′, ea locorum ſub Æquatore 00 gr. 00′, & ea locorum ad Polos 90 gr. & duplorum ſinus verſi ſint 11334, 00000 & 20000, exiſtente Radio 10000, & gravitas ad Polum ſit ad gravitatem ſub Æquatore ut 230 ad 229, & exceſſus gravitatis ad Polum ad gravitatem ſub Æquatore ut 1 ad 229: erit exceſſus gravitatis in Latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem ſub Æquatore, ut $1 \times \frac{11334}{20000}$ ad 229, ſeu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, & in Latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* longitudo penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis ſit pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli ſub Æquatore ſuperabitur a longitudine ſynchroni penduli *Pariſienſis*, exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ. Et ſimili computo confit Tabula ſequens.

Latitudo

Latitudo Loci	*Longitudo Penduli*		*Menſura Gradus unius in Meridiano*
Gr.	Ped.	Lin.	Hexaped.
0	3 .	7,468	56909
5	3 .	7,482	56914
10	3 .	7,526	56931
15	3 .	7,596	56959
20	3 .	7,692	56996
25	3 .	7,811	57042
30	3 .	7,948	57096
35	3 .	8,099	57155
40	3 .	8,261	57218
1	3 .	8,294	57231
2	3 .	8,327	57244
3	3 .	8,361	57257
4	3 .	8,394	57270
45	3 .	8,428	57283
6	3 .	8,461	57296
7	3 .	8,494	57309
8	3 .	8,528	57322
9	3 .	8,561	57335
50	3 .	8,594	57348
55	3 .	8,756	57411
60	3 .	8,907	57470
65	3 .	9,044	57524
70	3 .	9,162	57570
75	3 .	9,258	57607
80	3 .	9,329	57635
85	3 .	9,372	57652
90	3 .	9,387	57657

Conſtat autem per hanc Tabulam, quod graduum inæqualitas tam parva ſit, ut in rebus Geographicis figura Terræ pro Sphærica haberi poſſit, quodque inæqualitas diametrorum Terræ facilius & certius per experimenta pendulorum deprehendi poſſit vel etiam per Eclipſes Lunæ, quam per arcus Geographice menſuratos in Meridiano.

Hæc

Digitized by Google

De Mundi Systemate Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod Terra ex uniformi materia conſtat. Nam ſi materia ad centrum paulo denſior ſit quam ad ſuperficiem, differentiæ pendulorum & graduum Meridiani paulo majores erunt quam pro Tabula præcedente, propterea quod ſi materia ad centrum redundans qua denſitas ibi major redditur, ſubducatur & ſeorſim ſpectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter denſam, erit reciproce ut diſtantia ponderis a centro; in materiam vero redundantem reciproce ut quadratum diſtantiæ a materia illa quamproxime. Gravitas igitur ſub æquatore minor eſt in materiam illam redundantem quam pro computo ſuperiore: & propterea Terra ibi, propter defectum gravitatis, paulo altius aſcendet, & exceſſus longitudinum Pendulorum & graduum ad polos paulo majores erunt quam in præcedentibus definitum eſt.

Jam vero Aſtronomi aliqui in longinquas regiones ad obſervationes Aſtronomicas faciendas miſſi, invenerunt quod horologia oſcillatoria tardius moverentur prope Æquatorem quam in regionibus noſtris. Et primo quidem *D. Richer* hoc obſervavit anno 1672 in inſula *Cayennæ*. Nam dum obſervaret tranſitum Fixarum per meridianum menſe *Augusto*, reperit horologium ſuum tardius moveri quam pro medio motu Solis, exiſtente differentia 2′. 28″ ſingulis diebus. Deinde faciendo ut Pendulum ſimplex ad minuta ſingula ſecunda per horologium optimum menſurata oſcillaret, notavit longitudinem Penduli ſimplicis, & hoc fecit ſæpius ſingulis ſeptimanis per menſes decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus Penduli cum longitudine Penduli *Pariſienſis* (quæ erat trium pedum Pariſienſium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem eſſe, exiſtente differentia lineæ unius cum quadrante. At ex tarditate horologii oſcillatorii in *Cayenna*, differentia Pendulorum colligitur eſſe lineæ unius cum ſemiſſe.

Poſtea *Halleius* noſter circa annum 1677 ad inſulam *Stæ Helenæ* navigans, reperit horologium ſuum oſcillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, ſed differentiam non notavit. Pendulum vero brevius reddidit pluſquam octava parte digiti, ſeu linea una cum ſemiſſe. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in ima parte penduli non ſufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpoſuit.

Deinde anno 1682 *D. Varin* & *D. Des Hayes* invenerunt longitudinem Penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis in Obſervatorio

Digitized by Google

vatorio Regio *Pariſienſi* eſſe ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in inſula *Gorea* eadem methodo longitudinem Penduli ſynchroni invenerunt eſſe ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, exiſtente longitudinum differentia lin. 2. Et eodem anno ad inſulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem Penduli ſynchroni in his inſulis eſſe ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Poſthac *D. Couplet* filius anno 1697 menſe *Julio*, horologium ſuum oſcillatorium ad motum Solis medium in Obſervatorio Regio *Pariſienſi* ſic aptavit, ut tempore ſatis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyſſipponem* navigans invenit quod menſe *Novembri* proximo horologium tardius iret quam prius, exiſtente differentia $2'.\ 13''$ in horis 24. Et menſe *Martio* ſequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium ſuum tardius ire quam *Pariſiis*, exiſtente differentia $4'.\ 12''$ in horis 24. Et affirmat Pendulum ad minuta ſecunda oſcillans brevius fuiſſe *Ulyſſipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Pariſiis*. Rectius poſuiſſet differentias eſſe $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum $2'.\ 13''$, & $4'.\ 12''$ reſpondent. Craſſioribus hujus Obſervationibus minus fidendum eſt.

Annis proximis (1699 & 1700) *D. Des Hayes* ad *Americam* denuo navigans, determinavit quod in inſulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo Penduli ad minuta ſecunda oſcillantis, eſſet paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in inſula *S. Chriſtophori* longitudo illa eſſet ped. 3. lin. $6\frac{1}{4}$, & quod in inſula *S. Dominici* eadem eſſet ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuelleus* invenit in *Porto-belo* in *America* longitudinem Penduli ad minuta ſecunda oſcillantis, eſſe pedum trium Pariſienſium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id eſt, tribus fere lineis breviorem quam *Lutetiæ Pariſiorum*, ſed errante Obſervatione. Nam deinde ad inſulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem Penduli iſochroni eſſe pedum tantum trium Pariſienſium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* eſt $6^{gr.}\ 38'$ ad auſtrum, & ea *Portobeli* $9^{gr.}\ 33'$ ad boream, & Latitudines inſularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *S^{ti.} Chriſtophori*, & *S^{ti.} Dominici* ſunt reſpective $4^{gr.}\ 55'$, $14^{gr.}\ 40'$, $14^{gr.}\ 00'$, $14^{gr.}\ 44'$, $12^{gr.}\ 6'$, $17^{gr.}\ 19'$, & $19^{gr.}\ 48'$ ad boream. Et exceſſus longitudinis Penduli *Pariſienſis* ſupra longitudines Pendulorum iſochronorum in his latitudinibus obſervatas, ſunt paulo majores quam pro Tabula longitudinum Penduli ſuperius computata. Et propterea Terra aliquanto altior eſt ſub Æquatore quam pro ſuperiore calculo,

Digitized by Google

culo, & denſior ad centrum quam in fodinis prope ſuperficiem, niſi forte calores in Zona torrida longitudinem Pendulorum aliquantulum auxerint.

Obſervavit utique *D. Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evaſit pedis unius cum quarta parte lineæ. Deinde *D. de la Hire* obſervavit quod virga ferrea quæ tempore conſimili hyberno ſex erat pedum longitudinis, ubi Soli æſtivo exponebatur evaſit ſex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore caſu calor major fuit quam in poſteriore, in hoc vero major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad Solem æſtivum valde incaleſcunt. At virga penduli in horologio oſcillatorio nunquam exponi ſolet calori Solis æſtivi, nunquam calorem concipit calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga Penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æſtivo quam hyberno, ſed exceſſu quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt, diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus Aſtronomorum è *Gallia* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfecte congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint. Et in hoc concordant omnes, quod iſochrona pendula ſunt breviora ſub Æquatore quam in Obſervatorio Regio *Pariſienſi*, exiſtente differentia duarum circiter linearum ſeu ſextæ partis digiti. Per obſervationes *D. Richer* in *Cayenna* factas, differentia fuit lineæ unius cum ſemiſſe. Error ſemiſſis lineæ facile committitur. Et *D. des Hayes* poſtea per obſervationes ſuas in eadem inſula factas errorem correxit, inventa differentia linearum $2\frac{1}{18}$. Sed & per obſervationes in inſulis *Gorea*, *Guadaloupa*, *Martinica*, *Granada*, *S. Chriſtophori*, & *S. Dominici* factas & ad Æquatorem reductas, differentia illa prodiit haud minor quam $1\frac{12}{20}$ lineæ, haud major quam $2\frac{1}{2}$ linearum. Et inter hos limites quantitas mediocris eſt $2\frac{2}{40}$ linearum. Propter calores locorum in Zona torrida negligamus $\frac{2}{40}$ partes lineæ, & manebit differentia duarum linearum.

Quare cum differentia illa per Tabulam præcedentem, ex hypotheſi quod Terra ex materia uniformiter denſa conſtat, ſit tantum $1\frac{87}{1000}$ lineæ: exceſſus altitudinis Terræ ad æquatorem ſupra altitudinem ejus ad polos, qui erat milliarium $17\frac{1}{6}$, jam auctus in

ratione

Digitized by Google

ratione differentiarum, fiet milliarium $31\frac{2}{12}$. Nam tarditas Penduli ſub Æquatore defectum gravitatis arguit; & quo levior eſt materia eo major eſſe debet altitudo ejus, ut pondere ſuo materiam ſub Polis in æquilibrio ſuſtineat.

Hinc figura umbræ Terræ per Eclipſes Lunæ determinanda, non erit omnino circularis, ſed diameter ejus ab oriente in occidentem ducta major erit quam diameter ejus ab auſtro in boream ducta, exceſſu 55″ circiter. Et parallaxis maxima Lunæ in Longitudinem paulo major erit quam ejus parallaxis maxima in Latitudinem. Ac Terræ ſemidiameter maxima erit pedum Pariſienſium 19767630, minima pedum 19609820 & mediocris pedum 19688725 quamproxime.

Cum gradus unus menſurante *Picarto* ſit hexapedarum 57060, menſurante vero *Caſſino* ſit hexapedarum 57292: ſuſpicantur aliqui gradum unumquemque, pergendo per *Gallias* auſtrum verſus majorem eſſe gradu præcedente hexapedis plus minus 72, ſeu parte octingenteſima gradus unius; exiſtente Terra Sphæroide oblonga cujus partes ad polos ſunt altiſſimæ. Quo poſito, corpora omnia ad polos Terræ leviora forent quam ad Æquatorem, & altitudo Terræ ad polos ſuperaret altitudinem ejus ad æquatorem milliaribus fere 95, & pendula iſochrona longiora forent ad Æquatorem quam in Obſervatorio Regio *Pariſienſi* exceſſu ſemiſſis digiti circiter; ut conferenti proportiones hic poſitas cum proportionibus in Tabula præcedente poſitis, facile conſtabit. Sed & diameter umbræ Terræ quæ ab auſtro in boream ducitur, major foret quam diameter ejus quæ ab oriente in occidentem ducitur, exceſſu 2′. 46″, ſeu parte duodecima diametri Lunæ. Quibus omnibus Experientia contrariatur. Certe *Caſſinus*, definiendo gradum unum eſſe hexapedarum 57292, medium inter menſuras ſuas omnes, ex hypotheſi de æqualitate graduum aſſumpſit. Et quamvis *Picartus* in *Galliæ* limite boreali invenit gradum paulo minorem eſſe, tamen *Norwoodus* noſter in regionibus magis borealibus, menſurando majus intervallum, invenit gradum paulo majorem eſſe quam *Caſſinus* invenerat. Et *Caſſinus* ipſe menſuram *Picarti*, ob parvitatem intervalli menſurati, non ſatis certam & exactam eſſe judicavit ubi menſuram gradus unius per intervallum longe majus definire aggreſſus eſt. Differentiæ vero inter menſuras *Caſſini*, *Picarti*, & *Norwoodi* ſunt prope inſenſibiles, & ab inſenſibilibus obſervationum erroribus facile oriri potuere, ut Nutationem axis Terræ prætercam.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ ſingulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad poſitionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iſte nutandi perexiguus eſſet debet, & vix aut ne vix quidem ſenſibilis.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes Lunares, omneſque motuum inæqualitates ex allatis Principiis conſequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, poſſe alios minores circum ſe revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipſibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, iiſque adficientur inæqualitatibus quæ in Luna noſtra notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5. Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto deſcribit aream pro tempore majorem, Orbemque habet minus curvum, atque adeo propius accedit ad Terram, in Syzygiis quam in Quadraturis, niſi quatenus impedit motus Eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima eſt (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum Lunæ in Syzygiis verſatur, & minima ubi idem in Quadraturis conſiſtit; & inde Luna in Perigæo velocior eſt & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quam in Quadraturis. Progreditur inſuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, ſed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7. & 8. Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis ſuis, tardius regreditur in Quadraturis, & exceſſu progreſſus ſupra regreſſum annuatim fertur in conſequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI.) quieſcunt in Syzygiis ſuis, & velociſſime regrediuntur in Quadraturis. Sed & major eſt Lunæ latitudo maxima in ipſius Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quam in Syzygiis: & motus medius tardior in Perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop.

Digitized by Google

Prop. LXVI,) quam in ipſius Aphelio. Atque hæ ſunt inæqualitates inſigniores ab Aſtronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam nondum obſervatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nulla hactenus lege ad Regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim ſeu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter Eccentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per Corol. 1. & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Aſtronomico, ad Proſthaphæreſin Lunæ referri ſolet, & cum ea confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ noſtræ motus analogi Lunarum ſeu Satellitum Jovis ſic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis, eſt ad motum medium Nodorum Lunæ noſtræ, in ratione compoſita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iſte 8 gr. 24'. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujuſque in conſequentia, eſt ad motum Nodorum ipſius in antecedentia, ut motus Apogæi Lunæ noſtræ ad hujus motum Nodorum, (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob cauſam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujuſque fere ſunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ reſpective, ut motus Nodorum & Augis Satellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum,

rum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. Variatio Satellitis è Jove ſpectati, eſt ad Variationem Lunæ, ut ſunt ad invicem toti motus Nodorum temporibus quibus Satelles & Luna ad Solem revolvuntur, per idem Corollarium; adeoque in Satellite extimo non ſuperat $5''. 12'''$.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.

Mare ſingulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumeſcere debere ac bis defluere, patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulſum Luminarium ad Meridianum loci, minori quam ſex horarum ſpatio ſequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilenſi* & *Peruviano:* in quibus omnibus littoribus æſtus in horam circiter tertiam incidit, niſi ubi motus per loca vadoſa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulſu Luminaris utriuſque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quam ſupra, & per horas diei Lunaris intelligo vigeſimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur diſtincte, ſed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium Conjunctione vel Oppoſitione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æſtus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teſte, major eſt effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æſtus maximus qui ſola vi Lunari incidere ſemper deberet in horam tertiam Lunarem, & ſola Solari in tertiam Solarem, compoſitis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius eſt; adeoque in tranſitu Lunæ a Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam

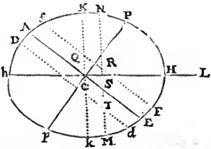
tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt Octantes Lunæ; & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam Lunarem in tranſitu Lunæ a Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita ſunt in Mari aperto. Nam in oſtiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus Luminarium ex eorum diſtantiis a Terra. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in Syzygiis paulo majores ſint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æſtivo; & Luna in Perigæo ſingulis menſibus majores ciet æſtus quam ante vel poſt dies quindecim, ubi in Apogæo verſatur. Vnde fit ut æſtus duo omnino maximi in Syzygiis continuis ſe mutuò non ſequantur.

Pendet etiam effectus utriuſque Luminaris ex ipſius Declinatione ſeu diſtantia ab Æquatore. Nam ſi Luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, abſque actionis intenſione & remiſſione, adeoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus in Syzygiis Solſtitialibus quam in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solſtitialibus majores ciebunt æſtus quam in Quadraturis Æquinoctialibus; eo quod Lunæ jam in æquatore conſtitutæ effectus maxime ſuperat effectum Solis Incidunt igitur æſtus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriuſque. Et æſtum maximum in Syzygiis comitatur ſemper minimus in Quadraturis, ut experientia compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam Solis a Terra, tempore hyberno quam tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpius præcedant Æquinoctium vernum quam ſequantur, & ſæpius ſequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Deſignet $ApEP$ Tellurem aquis profundis undique coopertam; C centrum ejus; P, p polos; AE Æquatorem; F locum quemvis extra Æquatorem; Ff parallelum loci; Dd parallelum ei reſpondentem ex altera parte æquatoris; L locum quem Luna tribus ante horis occupabat; H locum Telluris ei perpendiculariter ſubjectum;

De Mundi Systemate ſubjectum; *h* locum huic oppoſitum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 diſtantia, *CH*, *Ch* Maris altitudines maximas menſuratas a centro Telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & ſi axibus *Hh*, *Kk* deſcribatur Ellipſis, deinde Ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* deſcribatur Sphærois *HPKhpk*; deſignabit hæc figuram Maris quam proxime, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines Maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam ſi in præfata Ellipſeos revolutione punctum quodvis *N* deſcribat circulum *NM*, ſecantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibuſvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo Maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, ſitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujuſvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem; poſtea defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimo defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt ortum Lunæ; & affluxus poſterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Diſtinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus Hemiſphæricos, unum in Hemiſphærio *KHkC* ad Boream vergentem, alterum in Hemiſphærio oppoſito *KhkC*; quos igitur fluctum Borealem & fluctum Auſtralem nominare licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuo oppoſiti, veniunt per vices ad Meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum Lunarium duodecim. Cumque regiones Boreales magis participant fluctum Borealem, & Auſtrales magis Auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æſtus autem major, Luna in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem, & Luna declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solſtitiorum; præſertim ſi Lunæ Nodus aſcendens verſatur in principio Arietis. Sic experientia compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos & veſpertini tempore



pore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* vero altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æſtus, etiam ceſſantibus Luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proxime poſt Syzygias majores reddit, eoſque proxime poſt Quadraturas minuit. Unde fit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi a Syzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & Fluviorum oſtiis, ſint quarti vel etiam quinti a Syzygiis.

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ab Oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſive advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales a diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce ſuo ad Meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquille ſtagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æſtus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipſorum, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi Luna declinat in polum ſupra Horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu Lunæ ad Meridianum, atque Luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tunquini* ad *Batſham*, ſub latitudine

 Boreali

Digitized by Google

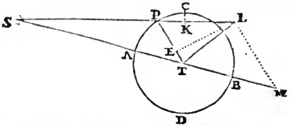
Boreali $20^{gr.}\ 50'$. *Halleius* ex Nautarum Obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum Lunæ per Æquatorem ſequente ſtagnat, dein Luna ad Boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum, dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & Luna declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinenſi* inter Continentem & Inſulam *Luconiam*, alter a Mari *Indico* inter Continentem & Inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim a Mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex a Mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia Marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Deſignet S Solem, T Terram, P Lunam, $PADB$ orbem Lunæ. In SP capiatur SK æqualis ST; ſitque SL ad SK



in duplicata ratione SK ad SP, & ipſi PT agatur parallela LM; & ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per diſtantiam ST vel SK, erit SL gravitas acceleratrix Lunæ in Solem.

Solem. Ea componitur ex partibus SM, LM, quarum LM & ipſius SM pars TM perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas TM & ML deſignare. Vis ML (in mediocri ſua quantitate) eſt ad vim centripetam, qua Luna in Orbe ſuo circa Terram quieſcentem ad diſtantiam PT revolvi poſſet, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc eſt, in duplicata ratione dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. ad dies 365. *hor.* 6. *min.* 9. id eſt, ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in Propoſitione quarta quod, ſi Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum diſtantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum mediocrium Terræ quamproxime. Et vis qua Luna in Orbe circa Terram quieſcentem, ad diſtantiam PT ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$ revolvi poſſet, eſt ad vim, qua eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproxime. Ideoque vis mediocris ML eſt ad vim gravitatis in ſuperficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, ſeu 1 ad 638092,6. Vnde ex proportione linearum TM, ML, datur etiam vis TM: & hæ ſunt vires Solis quibus Lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.*

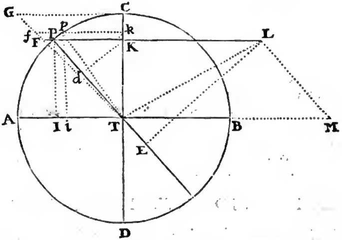
PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in Orbe circulari deſcribit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit, eſſe tempori proportionalem, niſi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic inveſtigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem eſſe, & inæqualitates omnes negligamus, ea ſola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem vero Solis diſtantiam, ponamus etiam lineas SP, ST ſibi invicem parallelas eſſe. Hoc pacto vis LM reducetur ſemper ad

Digitized by Google

ad mediocrem ſuam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires, per Legum Corol. 2. componunt vim TL; & hæc vis, ſi in radium TP demittatur perpendiculum LE, reſolvitur in vires TE, EL, quarum TE, agendo ſemper ſecundum radium TP, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ TPC radio illo TP factam; & EL agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in tranſitu ipſius a Quadratura C ad Conjunctionem A, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut ipſa vis accelerans EL, hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur tempus per motum medium Lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum CTP, vel



etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipſi CT æqualis. Et diviſo arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi poſſint, ductaque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipſis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit Kk ad PK ut Pp ad Tp, hoc eſt in data ratione, adeoque $FK \times Kk$ ſeu area $FKkf$, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id eſt, ut EL; & compoſite, area tota $GCKF$ ut ſumma omnium virium EL tempore toto CP impreſſarum in Lunam, atque adeo etiam ut velocitas hac

ſumma

Digitized by Google

ſumma genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ *CTP*, ſeu incrementum momenti. Vis qua Luna circa Terram quieſcentem ad diſtantiam *TP*, tempore ſuo periodico *CADBC* dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43 revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore *CT* cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in Orbe ſuo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I. Cum autem perpendiculum *Kd* in *TP* demiſſum ſit ipſius *EL* pars tertia, & ipſius *TP* ſeu *ML* in Octantibus pars dimidia, vis *EL* in Octantibus, ubi maxima eſt, ſuperabit vim *ML* in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore ſuo periodico circa Terram quieſcentem revolvi poſſet, ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ ſeu 11915, & tempore *CT* velocitatem generare deberet quæ eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem *CPA* velocitatem majorem generaret in ratione *CA* ad *CT* ſeu *TP*. Exponatur vis maxima *EL* in Octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo $\frac{1}{2}TP \times Pp$ æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis *CP* generare poſſet, erit ad velocitatem quam vis omnis minor *EL* eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CP$ ad aream *KCGF*: tempore autem toto *CPA*, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CA$ & triangulum *TCG*, ſive ut arcus quadrantalis *CA* & radius *TP*. Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas poſterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga eſt, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & ſi momentum mediocre exponatur per numerum 11915, ſumma 11915 + 50 ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia *A*, ac differentia 11915 − 50 ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium *FKCG* ad triangulum *TCG* (vel quod perinde eſt, ut quadratum Sinus *PK* ad quadratum Radii *TP*, id eſt, ut *Pd* ad *TP*) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi Luna eſt in loco quovis intermedio *P*.

Hæc omnia ita ſe habent, ex Hypotheſi quod Sol & Terra quieſcunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris vere ſit dierum

rum 29. *hor.* 12. & *min.* 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id eſt, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11073}$ momenti mediocris, jam fiet ejuſdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut 11023 − 50 ad 11023 + 50, ſeu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio *P* verſatur, ut 10973 ad 10973 + *Pd*, exiſtente videlicet *TP* æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proxime ut ſumma numeri 219,46 & Sinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ a Quadratura proxima, in circulo cujus radius eſt unitas. Hæc ita ſe habent ubi Variatio in Octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille verſus in eadem ratione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipſius diſtantiam a Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, ſingulis temporis momentis, deſcribit, eſt ut motus horarius Lunæ & quadratum diſtantiæ Lunæ a Terra conjunctim; & propterea diſtantia Lunæ a Terra eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione Areæ directe & ſubduplicata ratione motus horarii inverſe. *Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ ſit reciproce ut ipſius diſtantia a Terra. Tentent Aſtronomi quam probe hæc Regula cum Phænomenis congruat.

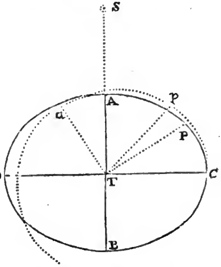
Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratius ex Phænomenis quam antehac definiri poteſt.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros Orbis in quo Luna, abſque eccentricitate, moveri deberet.

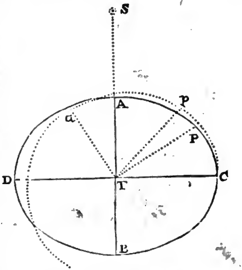
Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, ſi ſecundum Trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, deſcribit, eſt ut attractio directe & quadratum velocitatis inverſe. Curvaturas linearum pono eſſe inter

ter ſe in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis eſt exceſſus gravitatis ipſius in Terram ſupra vim Solarem $2PK$ (Vide *Figur. pag.* 394) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem ſuperat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris KT, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, ſi $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, ſunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proxime; ſeu ut $178725 N \times CTq - 2000 ATq \times CT$ & $178725 N \times ATq + 1000 CTq \times AT$. Nam ſi gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in Quadraturis eſt PT vel TK & Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris TM in Syzygiis erit 3000; de qua, ſi vis mediocris ML ſubducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis diſtrahitur a Terra, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis A & B eſt ad ipſius velocitatem in Quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit in Syzygiis ad momentum ejuſdem areæ in Quadraturis conjunctim; i. e. ut $11073 CT$ ad $10973 AT$. Sumatur hæc ratio bis inverſe & ratio prior ſemel directe, & fiet curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejuſdem curvaturam in Quadraturis ut $120406729 \times 178725 ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000 ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725 ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000 CTqq \times AT$, *i. e.* ut $2151969 AT \times CT \times N - 24081 AT\ cub.$ ad $2191371 AT \times CT \times N + 12261 CT\ cub.$



Quoniam

Quoniam Figura orbis Lunaris ignoratur, hujus vice aſſumamus Ellipſin $DBCA$, in cujus centro T Terra collocetur, & cujus axis major DC Quadraturis, minor AB Syzygiis interjaceat. Cum autem planum Ellipſeos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria cujus curvaturam conſideramus, deſcribi debet in plano quod omni motu angulari omnino deſtituitur: conſideranda erit Figura, quam Luna in Ellipſi illa revolvendo deſcribit in hoc plano, hoc eſt Figura Cpa, cujus puncta ſingula p inveniuntur capiendo punctum quodvis P in Ellipſi, quod locum Lunæ repreſentet, & ducendo Tp æqualem TP, ea lege ut angulus PTp æqualis ſit motui apparenti Solis a tempore Quadraturæ C confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus CTp ſit ad angulum CTP ut tempus revolutionis Synodicæ Lunaris ad tempus revolutionis Periodicæ ſeu $29^{d.}\,12^{h.}\,44'$, ad $27^{d.}\,7^{h.}\,43'$. Capiatur igitur angulus CTa in eadem ratione ad angulum rectum CTA, & ſit longitudo Ta æqualis longitudini TA; & erit a Apſis ima & C Apſis ſumma Orbis hujus Cpa. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam Orbis Cpa in vertice a, & curvaturam Circuli centro T intervallo TA deſcripti, ſit ad differentiam inter curvaturam Ellipſeos in vertice A & curvaturam ejuſdem Circuli, in duplicata ratione anguli CTP ad angulum CTp; & quod curvatura Ellipſeos in A ſit ad curvaturam Circuli illius, in duplicata ratione TA ad TC; & curvatura Circuli illius ad curvaturam Circuli centro T intervallo TC deſcripti, ut TC ad TA; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipſeos in C, in duplicata ratione TA ad TC; & differentia inter curvaturam Ellipſeos in vertice C & curvaturam Circuli noviſſimi, ad differentiam inter curvaturam Figuræ Tpa in vertice C & curvaturam ejuſdem Circuli, in duplicata ratione anguli



Digitized by Google

anguli CTp ad angulum CTP. Quæ quidem rationes ex ſinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His autem inter ſe collatis, prodit curvatura Figuræ Cpa in a ad ipſius curvaturam in C, ut $ATcub + \frac{16824}{100000}CTq \times AT$ ad $CTcub + \frac{16824}{100000}ATq \times CT$. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum CTP & CTp applicatam ad quadratum anguli minoris CTP, ſeu (quod perinde eſt) differentiam quadratorum temporum $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'$, & $29^{d.}\ 12^{h.}\ 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'$.

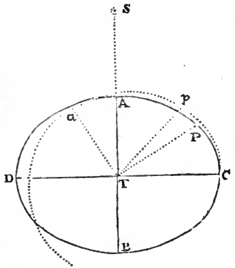
Igitur cum a deſignet Syzygiam Lunæ, & C ipſius Quadraturam, proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejuſdem curvaturam in Quadraturis, quam ſupra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062{,}79\,CTqq - 2151969\,N \times CTcub + 368676\,N \times AT \times CTq + 36342\,ATq \times CTq - 362047\,N \times ATq \times CT + 2191371\,N \times ATcub + 4051{,}4\,ATqq = 0$. Hic pro terminorum AT & CT ſemiſumma N ſcribo 1, & pro eorundem ſemidifferentia ponendo x, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſoluta, obtinetur x æqualis $0{,}00719$. & inde ſemidiameter CT fit $1{,}00719$. & ſemidiameter AT $0{,}99281$, qui numeri ſunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proxime. Eſt igitur diſtantia Lunæ a Terra in Syzygiis ad ipſius diſtantiam in Quadraturis (ſepoſita ſcilicet Eccentricitatis conſideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit. Si Luna P in Ellipſi $DBCA$ circa Terram in centro Ellipſeos quieſcentem moveretur, & radio TP ad Terram ducto deſcriberet aream CTP tempori proportionalem; eſſet autem Ellipſeos ſemidiameter maxima CT ad ſemidiametrum minimam TA ut 70 ad 69: foret tangens anguli CTP ad tangentem anguli motus medii a Quadratura C computati, ut Ellipſeos ſemidiameter TA ad ejuſdem ſemidiametrum

TC ſeu 69 ad 70. Debet autem deſcriptio areæ *CTP*, in progreſſu Lunæ a Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ ſit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973, utque exceſſus momenti in loco quovis intermedio *P* ſupra momentum in Quadratura ſit ut quadratum ſinus anguli *CTP*. Id quod ſatis accurate fiet, ſi tangens anguli *CTP* diminuatur in ſubduplicata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id eſt, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli *CTP* jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus *CTP* in Octantibus, ubi motus medius eſt 45 gr. invenietur 44 gr. 27'. 28''. qui ſubductus de angulo motus medii 45 gr. relinquit Variationem maximam 32'. 32''. Hæc ita ſe haberent ſi Luna, pergendo a Quadratura ad Syzygiam, deſcriberet angulum *CTA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quo Sol in conſequentia motu apparente transfertur, Luna, priuſquam Solem aſſequitur, deſcribit angulum *CTa* angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis Lunaris Synodicæ ad tempus revolutionis Periodicæ, id eſt, in ratione 29 d. 12 h. 44'. ad 27 d. 7 h. 43'. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum *T* dilatantur in eadem ratione, & Variatio maxima quæ ſecus eſſet 32'. 32'', jam aucta in eadem ratione fit 35'. 10''.



Hæc eſt ejus magnitudo in mediocri diſtantia Solis a Terra, neglectis differentiis quæ a curvatura Orbis magni majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibboſam & plenam, oriri poſſint. In aliis diſtantiis Solis a Terra, Variatio maxima eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione temporis revolutionis Synodicæ Lunaris (dato anni tempore) directe, & triplicata ratione diſtantiæ Solis a Terra inverſe. Ideoque in Apogæo

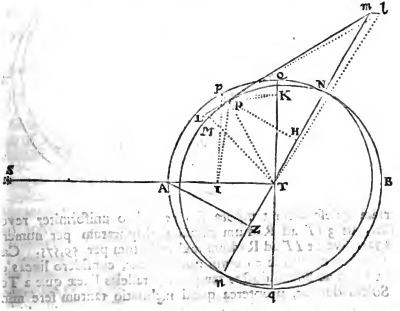
Apogæo Solis, Variatio maxima eſt 33′. 14″, & in ejus Perigæo 37′. 11″, ſi modo Eccentricitas Solis ſit ad Orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{11}{12}$ ad 1000.

Hactenus Variationem inveſtigavimus in Orbe non eccentrico, in quo utique Luna in Octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſua diſtantia a Terra. Si Luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat a Terra quam ſi locaretur in hoc Orbe, Variatio paulo major eſſe poteſt vel paulo minor quam pro Regula hic allata: ſed exceſſum vel defectum ab Aſtronomis per Phænomena determinandum relinquo.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe circulari.

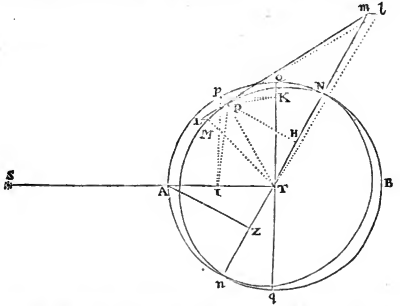
Deſignet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *NPn* Orbem Lunæ, *Npn* veſtigium Orbis in plano Eclipticæ; *N*, *n* Nodos, *nTNm*



lineam Nodorum infinite productam; *PI*, *PK* perpendicula demiſſa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demiſſum in planum

 Eclip-

Eclipticæ ; Q, q Quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ, & pK perpendiculum in lineam Qq Quadraturis interjacentem. Vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. xxv.) duplex eſt, altera lineæ LM, altera lineæ MT proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, poſteriore in Solem ſecundum lineam rectæ ST a Terra ad Solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior LM agit ſecundum planum orbis Lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior MT qua planum Orbis Lunaris perturbatur eadem eſt cum vi $3PK$ vel $3IT$. Et hæc vis (per Prop. xxv.) eſt ad vim qua Luna in circulo circa



Terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet, ut $3IT$ ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, ſive ut IT ad Radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo & eo omni qui ſequitur, conſidero lineas omnes a Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum fere minuit effectus omnes in aliquibus caſibus, quantum auget in aliis ; & Nodorum motus mediocres quærimus, neglectis iſtiuſmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

De-

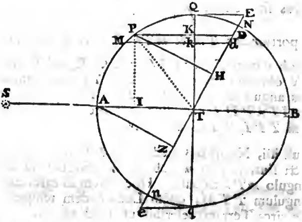
Digitized by Google

Deſignet jam *PM* arcum, quem Luna dato tempore quam minimo deſcribit, & *ML* lineolam quam Luna, impellente vi præfata $3IT$, eodem tempore deſcribere poſſet. Jungantur *PL*, *MP*, & producantur eæ ad *m* & *l*, ubi ſecent planum Eclipticæ; inque *Tm* demittatur perpendiculum *PH*. Et quoniam recta *ML* parallela eſt plano Eclipticæ, ideoque cum recta *ml* quæ in plano illo jacet concurrere non poteſt, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi *LMPml*; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea ſimilia erunt triangula *LMP*, *Lmp*. Jam cum *MPm* ſit in plano Orbis, in quo Luna in loco *P* movebatur, incidet punctum *m* in lineam *Nn* per Orbis illius Nodos *N*, *n* ductam. Et quoniam vis qua lineola *LM* generatur, ſi tota ſimul & ſemel in loco *P* impreſſa eſſet, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda eſſet *LP*, atque adeo transferret Lunam de plano *MPmT* in planum *LPlT*; motus angularis Nodorum a vi illa genitus, æqualis erit angulo *mTl*. Eſt autem *ml* ad *mP* ut *ML* ad *MP*, adeoque cum *MP* ob datum tempus data ſit, eſt *ml* ut rectangulum $ML \times mP$, id eſt, ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus *mTl*, ſi modo angulus *Tml* rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id eſt, (ob proportionales *Tm* & *mP*, *TP* & *PH*) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, adeoque ob datam *TP*, ut $IT \times PH$. Quod ſi angulus *Tml*, ſeu *STN* obliquus ſit, erit angulus *mTl* adhuc minor, in ratione ſinus anguli *STN* ad Radium. Eſt igitur velocitas Nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, ſive ut contentum ſub ſinubus trium angulorum *TPI*, *PTN* & *STN*.

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia exiſtentibus, recti ſint, lineola *ml* abibit in infinitum, & angulus *mTl* evadet angulo *mPl* æqualis. Hoc autem in caſu, angulus *mPl* eſt ad angulum *PTM*, quem Luna eodem tempore motu ſuo apparente circa Terram deſcribit ut 1 ad 59,575. Nam angulus *mPl* æqualis eſt angulo *LPM*, id eſt, angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem ſola vis præfata Solaris $3IT$ ſi tum ceſſaret Lunæ gravitas dato illo tempore generare poſſet; & angulus *PTM* æqualis eſt angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe ſuo retinetur, ſi tum ceſſaret vis Solaris $3IT$ eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut ſupra diximus,

mus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius Lunæ (reſpectu fixarum) ſit 32'. 56''. 27'''. 12^iv ½, motus horarius Nodi in hoc caſu erit 33''. 10'''. 33^iv. 12^v. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad 33''. 10'''. 33^iv. 12^v. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium *TPI*, *PIN*, & *STN* (ſeu diſtantiarum Lunæ a Quadratura, Lunæ a Nodo, & Nodi a Sole) ad cubum Radii. Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quoties Luna inter Quadraturam alterutram & Nodum Quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum, ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc ſi a dati arcus quam minimi *PM* terminis *P* & *M* ad lineam Quadraturas jungentem *Qq* demittantur perpendicula *PK*, *Mk*, eademque producantur donec ſecent lineam Nodorum *Nn* in *D* & *d*; erit motus horarius Nodorum ut area *MPDd* & quadratum lineæ *AZ* conjunctim. Sunto enim



PK, *PH* & *AZ* prædicti tres ſinus. Nempe *PK* ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadratura, *PH* ſinus diſtantiæ Lunæ a Nodo, & *AZ* ſinus diſtantiæ Nodi a Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum $PK \times PH \times AZ$. Eſt autem *PT* ad *PK* ut *PM* ad *Kk*, adeoque ob datas *PT* & *PM* eſt *Kk* ipſi *PK* proportionalis. Eſt & *AT* ad *PD* ut *AZ* ad *PH*, & propterea *PH* rectangulo $PD \times AZ$

Digitized by Google

$PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ eſt ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ qu.$ id eſt, ut area $PDdM$ & $AZqu.$ conjunctim. *Q.E.D.*

Corol. 2. In data quavis Nodorum poſitione, motus horarius mediocris eſt ſemiſſis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque eſt ad 16″. 35‴. 16iv. 36v. ut quadratum ſinus diſtantiæ Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii, ſive ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ Nam ſi Luna uniformi cum motu perambulet ſemicirculum QAq, ſumma omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna pergit a Q ad M, erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum n, ſumma illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD deſcribit, dein Luna pergente ab n ad q, linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam deſcribet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, ſubduci debet de area priore, & cum æqualis ſit areæ QEN, relinquet ſemicirculum $NQAn$. Igitur ſumma omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna ſemicirculum deſcribit, eſt area ſemicirculi; & ſumma omnium quo tempore Luna circulum deſcribit eſt area circuli totius. At area $PDdM$, ubi Luna verſatur in Syzygiis, eſt rectangulum ſub arcu PM & radio MT; & ſumma omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum deſcribit, eſt rectangulum ſub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum ſit æquale duobus circulis, duplo majus eſt quam rectangulum prius. Proinde Nodi, ea cum velocitate uniformiter continuata quam habent in Syzygiis Lunaribus, ſpatium duplo majus deſcriberent quam revera deſcribunt; & propterea motus mediocris quocum, ſi uniformiter continuaretur, ſpatium a ſe inæquabili cum motu revera confectum deſcribere poſſent, eſt ſemiſſis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, ſi Nodi in Quadraturis verſantur, ſit 33′. 10″. 33iv. 12v, motus mediocris horarius in hoc caſu erit 16″. 35‴. 16iv. 36v. Et cum motus horarius Nodorum ſemper ſit ut $AZqu.$ & area $PDdM$ conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut $AZqu.$ & area $PDdM$ conjunctim, id eſt (ob datam aream $PDdM$ in Syzygiis deſcriptam) ut $AZqu.$ erit etiam motus mediocris ut $AZqu.$ atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas verſantur, erit ad 16″. 35‴. 16iv. 36v. ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ *Q.E.D.*

PRO-

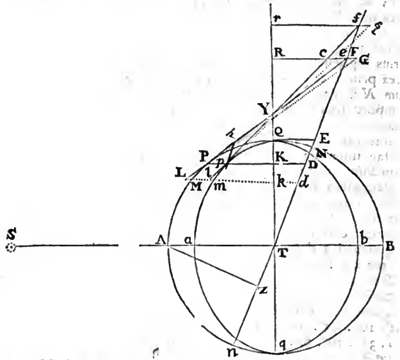
Digitized by Google

De Mundi Systemate

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.

Deſignet *Qpmaq* Ellipſin, axe majore *Qq*, minore *ab* deſcriptam, *QAq* Circulum circumſcriptum, *T* Terram in utriuſque centro communi, *S* Solem, *p* Lunam in Ellipſi motam, & *pm* arcum quem data temporis particula quam minima deſcribit, *N* & *n* Nodos linea *Nn* junctos, *pK* & *mk* perpendicula in axem *Qq* demiſſa & hinc inde producta, donec occurrant Circulo in *P* & *M*,



& lineæ Nodorum in *D* & *d*. Et ſi Luna, radio ad Terram ducto, aream deſcribat tempori proportionalem, erit motus Nodi in Ellipſi ut area *pDdm*.

Nam ſi *PF* tangat Circulum in *P*, & producta occurrat *TN* in *F*, & *pf* tangat Ellipſin in *p* & producta occurrat eidem *TN* in

in f, conveniant autem hæ tangentes in axe TQ ad T; & ſi ML deſignet ſpatium quod Luna in Circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum PM, urgente & impellente vi prædicta $3IT$, motu tranſverſo deſcribere poſſet, & ml deſignet ſpatium quod Luna in Ellipſi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$, deſcribere poſſet; & producantur LP & lp donec occurrant plano Eclipticæ in G & g; & jungantur FG & fg, quarum FG producta ſecet pf, pg & TQ in c, e & R reſpective, & fg producta ſecet TQ in r: Quoniam vis $3IT$ ſeu $3PK$ in Circulo eſt ad vim $3IT$ ſeu $3pK$ in Ellipſi, ut PK ad pK, ſeu AT ad aT; erit ſpatium ML vi priore genitum, ad ſpatium ml vi poſteriore genitum, ut PK ad pK, id eſt, ob ſimiles figuras $PYKp$ & $FYRc$, ut FR ad cR. Eſt autem ML ad FG (ob ſimilia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc eſt (ob parallelas Lk, PK, GR) ut pl ad pe, id eſt, (ob ſimilia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inverſe ut LM eſt ad lm, ſeu FR ad cR, ita eſt FG ad ce. Et propterea ſi fg eſſet ad ce ut fY ad cY, id eſt, ut fr ad cR (hoc eſt, ut fr ad FR & FR ad cR conjunctim, id eſt, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim,) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT, foret fg ad FG ut fT ad FT; atque adeo anguli, quos FG & fg ſubtenderent ad Terram T, æquarentur inter ſe. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propoſitione expoſuimus) ſunt motus Nodorum, quo tempore Luna in Circulo arcum PM, in Ellipſi arcum pm percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipſi æquarentur inter ſe. Hæc ita ſe haberent, ſi modo fg eſſet ad ce ut fY ad cY, id eſt, ſi fg æqualis eſſet $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verum ob ſimilia triangula fgp, cep, eſt fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis eſt $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea angulus, quem fg revera ſubtendit, eſt ad angulum priorem, quem FG ſubtendit, hoc eſt, motus Nodorum in Ellipſi ad motum Nodorum in Circulo, ut hæc fg ſeu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg ſeu $\frac{ce \times fY}{cY}$, id eſt, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, ſeu fp ad fY & cY ad cp, hoc eſt, ſi ph ipſi TN parallela occurrat FP in h, ut Fh ad FY & FY ad FP; hoc eſt, ut Fh ad FP ſeu Dp ad DP, adeoque ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum area po-

 ſterior

 ſterior proportionalis ſit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipſi. *Q. E. D.*

Corol. Igitur cum, in data Nodorum poſitione, ſumma omnium arearum *pDdm*, quo tempore Luna pergit a Quadratura ad locum quemvis *m*, ſit area *mpQEd*, quæ ad Ellipſeos tangentem *QE* terminatur; & ſumma omnium arearum illarum, in revolutione integra, ſit area Ellipſeos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipſi erit ad motum mediocrem Nodorum in Circulo, ut Ellipſis ad Circulum; id eſt, ut *Ta* ad *TA*, ſeu 69 ad 70. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in Circulo ſit ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut *AZqu.* ad *ATqu.* ſi capiatur angulus $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. ad angulum $16'. 35''. 16'''. 36^{v}$. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipſi ad $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. ut *AZq* ad *ATq*; hoc eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ Nodi a Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius deſcribit in Syzygiis quam in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in Octantibus eſt ad exceſſum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum ſemiſumma 11023 ad eorundem ſemidifferentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in ſingulis Orbis particulis æqualibus ſit reciproce ut ipſius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad exceſſum temporis in Quadraturis, ac defectum in Syzygiis, ab hac cauſa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a Quadraturis ad Syzygias, invenio quod exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in Quadraturis, ſit ut quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadraturis quam proxime; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in Octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadraturis & quadratum ſinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias, eſt in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit ſingulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Eſt enim motus iſte, dum Luna

per-

Digitized by Google

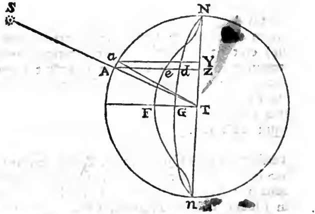
percurrit PM, (cæteris paribus) ut ML, & ML eſt in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073 quam proxime. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, eſt quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadratura & ſemiſſem quadrati Radii ad ſemiſſem quadrati Radii, conjunctim. Unde ſi Nodi in Quadraturis verſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde diſtantia, & alia duo a Syzygia & Quadratura iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter Syzygiam & Octantem, ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti rationem ineunti facile conſtabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur) erat $32''. 42'''. 7^{iv}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior deſcribit idem ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud eſt $17'''. 43^{iv}. 11^{v}$, cujus pars quarta $4'''. 25^{iv}. 48^{v}$, motui horario mediocri ſuperius invento $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. ſubducta, relinquit $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

Si Nodi verſantur extra Quadraturas, & ſpectentur loca bina a Syzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum Nodorum, ubi Luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi Luna in iiſdem locis & Nodi in Quadraturis verſantur, ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ Et decrementa motuum, a cauſis jam expoſitis orianda, erunt ad invicem ut ipſi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum ſitu, ad $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. ut $AZqu.$ ad $ATqu$; id eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium Nodorum Lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe Nodum verſari in *N*, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad Stellas Fixas. Interea vero Solem *S*, per motum Terræ, progredi a Nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad Solem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut *AZq*, id eſt (ob proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum ſub *AZ* & *ZY*, hoc eſt, ut area *AZYa*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum *aYZA*, id eſt, ut area *NAZ*. Eſt autem maxima



AZq æqualis rectangulo ſub arcu *Aa* & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentia tota & radio; id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, erat $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. *hor.* 6. *min.* 9. fit $39^{gr.} 38'. 7''. 50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr.} 49'. 3''. 55'''$. eſt motus

Digitized by Google

tus medius Nodorum circulo toti reſpondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergit ab N ad A, eſt ad $19^{gr.} 49'. 3''. 55'''$. ut area NAZ ad circulum totum.

Hæc ita ſe habent, ex Hypotheſi quod Nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut Sol anno toto completo ad Nodum eundem redeat a quo ſub initio digreſſus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. Cum Sol anno toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr.} 38'. 7''. 50'''$, ſeu 39,6355 gradus; & motus mediocris Nodi in loco quovis N ſit ad ipſius motum mediocrem in Quadraturis ſuis, ut AZq ad ATq: erit motus Solis ad motum Nodi in N, ut $360 ATq$ ad $39,6355 AZq$; id eſt, ut $9,0827646 ATq$ ad AZq. Unde ſi circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas æquales Aa, tempus quo Sol percurrat particulam Aa, ſi circulus quieſceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, ſi circulus una cum Nodis circa centrum T revolvatur, reciproce ut $9,0827646 ATq$ ad $9,0827646 ATq + AZq$. Nam tempus eſt reciproce ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas eſt ſumma velocitatum Solis & Nodi. Igitur ſi tempus, quo Sol abſque motu Nodi percurreret arcum NA, exponatur per Sectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum Aa, exponatur per Sectoris particulam ATa; & (perpendiculo aT in Nn demiſſo) ſi in AZ capiatur dZ, ejus longitudinis ut ſit rectangulum dZ in ZT ad Sectoris particulam ATa ut AZq ad $9,0827646 ATq + AZq$, id eſt, ut ſit dZ ad $\frac{1}{2} AZ$ ut ATq ad $9,0827646 ATq + AZq$; rectangulum dZ in ZT deſignabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et ſi punctum d tangit Curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea exceſſus Sectoris NAT ſupra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor eſt in ratione temporis, debebit etiam area $AaTZ$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet ſi capiatur in AZ longitudo eZ, quæ ſit ad longitudinem AZ ut AZq ad $9,0827646 ATq + AZq$. Sic enim rectangulum eZ in ZT erit ad aream $AZTa$ ut decrementum temporis quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur ſi Nodus quieſceret: Et propterea rectangulum illud reſpondebit decremento motus Nodi. Et ſi punctum e tangat

Curvam

Curvam $NeFn$, area tota NeZ, quæ ſumma eſt omnium decrementorum, reſpondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe reſpondebit motui reliquo, qui verus eſt Nodi motus quo tempore arcus totus NA, per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam vero area ſemicirculi eſt ad aream Figuræ $NeFnT$, per methodum Serierum infinitarum quæſitam, ut 793 ad 60 quamproxime. Motus autem qui reſpondet Circulo toti erat $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$; & propterea motus, qui Figuræ $NeFnT$ duplicatæ reſpondet, eſt $1^{gr.}\ 29'.\ 58''.\ 2'''$. Qui de motu priore ſubductus relinquit $18^{gr.}\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. motum totum Nodi inter ſui ipſius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 ſubductus, relinquit $341^{gr.}\ 40'.\ 54''.\ 7'''$. motum Solis inter eaſdem Conjunctiones. Iſte autem motus eſt ad motum annuum $360^{gr.}$ ut Nodi motus jam inventus $18^{gr.}\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. ad ipſius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr.}\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. Hic eſt motus medius Nodorum in anno Sidereo. Idem per Tabulas Aſtronomicas eſt $19^{gr.}\ 21'.\ 21''.\ 50'''$. Differentia minor eſt parte trecenteſima motus totius, & ab Orbis Lunaris Eccentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Eccentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem viciſſim retardatur aliquantulum, & ad juſtam velocitatem reducitur.

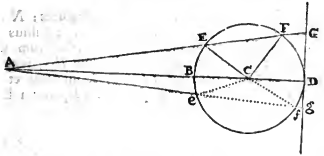
PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

In tempore quod eſt ut area $NTA-NdZ$, (*in Fig. præced.*) motus iſte eſt ut area $NAeN$, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem Problematis conſtructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, deſcribatur circulus $BEFD$. Producatur DC ad A, ut ſit AB ad AC ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, (id eſt, ut $19^{gr.}\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. ad $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$, atque adeo BC ad AC ut motuum differentia $0^{gr.}\ 31'.\ 2''.\ 32'''$, ad motum poſteriorem $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$) hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{1}{10}$ dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & ſi capiatur angulus BCE vel BCF æqualis duplæ diſtantiæ Solis a loco Nodi, per motum medium invento;

&

& agatur *AE* vel *AF* ſecans perpendiculum *DG* in *G*; & capiatur angulus qui ſit ad motum totum Nodi inter ipſius Syzygias (id eſt, ad 9^gr. 11′. 3″.) ut tangens *DG* ad circuli *BED* circumferentiam totam; atque angulus iſte (pro quo angulus *DAG* uſurpari poteſt) ad motum medium Nodorum addatur ubi Nodi



tranſeunt a Quadraturis ad Syzygias, & ab eodem motu medio ſubducatur ubi tranſeunt a Syzygiis ad Quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus ſic inventus congruet quam proxime cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream $NTA - NdZ$, & motum Nodi per aream $NAeN$; ut rem perpendenti & computationes inſtituenti conſtabit. Hæc eſt æquatio annua motus Nodorum. Eſt & æquatio menſtrua, ſed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minime neceſſaria eſt. Nam cum Variatio Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia ſit, alteri annuæ, alteri autem menſtruæ; hujus menſtrua inæqualitas & æquatio menſtrua Nodorum ita ſe mutuo contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi poſſint.

Corol. Ex hac & præcedente Propoſitione liquet quod Nodi in Syzygiis ſuis quieſcunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario 16″. 19‴. 26^iv. Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus ſit 1^gr. 30′. Quæ omnia cum Phænomenis cœleſtibus probe quadrant.

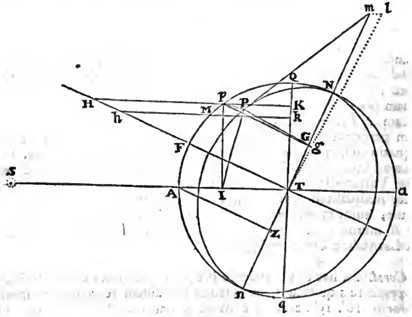
PRO-

De Mundi Systemate

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire Variationem horariam Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Deſignent *A* & *a* Syzygias; *Q* & *q* Quadraturas; *N* & *n* Nodos; *P* locum Lunæ in Orbe ſuo; *p* veſtigium loci illius in plano Eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum Nodorum ut ſupra. Et ſi ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, jungatur *pG*, & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* Inclinatio orbis Lunaris ad planum Eclipticæ,



ubi Luna verſatur in *P*; & angulus *Pgp* Inclinatio ejuſdem poſt momentum temporis completum; adeoque angulus *GPg* Variatio momentanea Inclinationis. Eſt autem hic angulus *GPg* ad angulum *GTg*, ut *TG* ad *PG* & *Pp* ad *PG* conjunctim. Et propterea ſi pro momento temporis ſubſtituatur hora; cum angulus *GTg* (per Propoſit. xxx.) ſit ad angulum 33″. 10‴. 33^iv. ut

IT×

$IT \times PG \times AZ$ ad $AT\,cub$, erit angulus GPg (ſeu Inclinationis horaria Variatio) ad angulum 33″. 10‴. 33^iv, ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\,cub$. *Q.E.I.*

Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod Luna in Orbe Circulari uniformiter gyratur. Quod ſi Orbis ille Ellipticus ſit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti ſupra expoſitum eſt. Et in eadem ratione minuetur etiam Inclinationis Variatio.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, ſitque pM motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demiſſa & utrinque producta occurrant TF in H & h: erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc eſt, æquale areæ $HpMh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea Inclinationis Variatio horaria ad 33″. 10‴. 33^iv, ut $HpMh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\,cub$.

Corol. 2. Ideoque ſi Terra & Nodi ſingulis horis completis retraherentur à locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſitus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore menſis illius foret ad 33″. 10‴. 33^iv, ut aggregatum omnium arearum $HpMh$, in revolutione puncti p genitarum, & ſub ſignis propriis + & − conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT\,cub$. id eſt, ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT\,cub$. hoc eſt, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times AT\,quad$.

Corol. 3. Proinde in dato Nodorum ſitu, Variatio mediocris horaria, ex qua per menſem uniformiter continuata Variatio illa menſtrua generari poſſet, eſt ad 33″. 10‴. 33^iv, ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,ATq$, ſive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4\,AT$, id

 eſt

eſt (cum $\mathcal{P}p$ ſit ad $\mathcal{P}G$ ut ſinus Inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{4}AT}$ ſit ad $4AT$ ut ſinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut Inclinationis ejuſdem ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quoniam Inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis verſantur, eſt (per hanc Propoſitionem) ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{\mathcal{P}p}{\mathcal{P}G}$ ad $AT\,cub.$ id eſt, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{\mathcal{P}p}{\mathcal{P}G}$ ad $2AT$; hoc eſt, ut ſinus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{\mathcal{P}p}{\mathcal{P}G}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc ſitu Nodorum tranſit à Quadratura ad Syzygiam, (id eſt, ſpatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad ſummam totidem angulorum $33''. 10'''. 33^{iv}$, ſeu $5878''$, ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ Lunæ à Quadraturis ducta in $\frac{\mathcal{P}p}{\mathcal{P}G}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc eſt, ut diameter ducta in $\frac{\mathcal{P}p}{\mathcal{P}G}$ ad circumferentiam; id eſt, ſi Inclinatio ſit $5^{gr.}\ 1'$, ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, ſeu 278 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex ſumma omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, eſt $163''$, ſeu $2'. 43''$.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

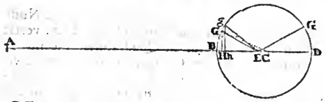
Dato tempore invenire Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Sit $A\mathcal{D}$ ſinus Inclinationis maximæ, & AB ſinus Inclinationis minimæ. Biſecetur $B\mathcal{D}$ in C, & centro C, intervallo BC, deſcribatur Circulus $BG\mathcal{D}$. In AC capiatur CE in ea ratione ad EB quam EB habet ad $2BA$: Et ſi dato tempore conſtituatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Qua-

Digitized by Google

Quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH ſinus Inclinationis quæſitæ.

Nam GEq æquale eſt $GHq + HEq = BHD + HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam Nodorum à Quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg, ob datum



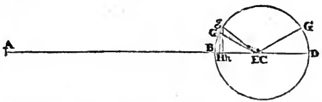
angulum GEg, erit ut diſtantia GE. Eſt autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH \times Gg$, ſeu $GH \times GE$; id eſt, ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus Inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu Inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed AH ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q.E.D.*

In hac demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & Inclinationis Variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut contentum ſub Inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris Inclinationis ſinus AH ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cum Inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr.} 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem Variatio tota, ſinuum differentiæ BD reſpondens, ad Variationem illam horariam ut diameter BD ad

 arcum

arcum Gg; id eſt, ut diameter BD ad ſemicircumferentiam BGD & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota BD ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$ ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eſt, ut 29645 ad 1000, & inde Variatio illa BD prodibit $16'.\ 23''\frac{1}{2}$.

Hæc eſt Inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe ſuo non conſideratur. Nam Inclinatio, ſi Nodi in Syzygiis verſantur, nil mutatur ex vario ſitu Lunæ. At ſi Nodi in Quadraturis conſiſtunt, Inclinatio minor eſt ubi Luna verſatur in Syzygiis, quam ubi ea verſatur in Quadraturis, exceſſu $2'.\ 43''$; uti in Propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſus dimidio $1'.\ 21''\frac{1}{2}$. Variatio tota mediocris BD in Quadraturis Lunaribus diminuta fit $15'.\ 2''$, in ipſius autem Syzygiis aucta fit $17'.\ 45''$. Si Luna igitur in Syzygiis conſtituatur, Variatio tota, in tranſitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit $17'.\ 45''$: adeoque ſi Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis verſantur, ſit $5^{gr.}\ 17'.\ 20''$; eadem, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit $4^{gr.}\ 59'.\ 35''$. Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex Obſervationibus.



Si jam deſideretur Orbis Inclinatio illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis verſantur; fiat AB ad AD ut ſinus graduum $4.\ 59'.\ 35''$ ad ſinum graduum $5.\ 17'.\ 20''$, & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Quadraturis; & erit AH ſinus Inclinationis quæſitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis eſt ejuſdem Inclinatio, ubi Luna diſtat $90^{gr.}$ à Nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compenſatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus Nodorum, (ut ſupra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi poteſt.

Scho-

Scholium.

Hiſce motuum Lunarium computationibus oſtendere volui, quod motus Lunares, per Theoriam Gravitatis, a cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem Theoriam inveni præterea quod Æquatio Annua medii motus Lunæ oriatur a varia dilatatione Orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. Hæc vis in Perigæo Solis major eſt, & Orbem Lunæ dilatat; in Apogæo ejus minor eſt, & Orbem illum contrahi permittit. In Orbe dilatato Luna tardius revolvitur, in contracto citius; & Æquatio Annua per quam hæc inæqualitas compenſatur, in Apogæo & Perigæo Solis nulla eſt, in mediocri Solis a Terra diſtantia ad 11′. 50″ circiter aſcendit, in aliis locis Æquationi centri Solis proportionalis eſt; & additur medio motui Lunæ ubi Terra pergit ab Aphelio ſuo ad Perihelium, & in oppoſita Orbis parte ſubducitur. Aſſumendo radium Orbis magni 1000 & Eccentricitatem Terræ $16\frac{7}{8}$, hæc Æquatio ubi maxima eſt, per Theoriam Gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed Eccentricitas Terræ paulo major eſſe videtur, & aucta Eccentricitate hæc Æquatio augeri debet in eadem ratione. Sit Eccentricitas $16\frac{11}{16}$, & Æquatio maxima erit 11′. 52″.

Inveni etiam quod in Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, Apogæum & Nodi Lunæ velocius moventur quam in Aphelio ejus, idque in triplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Et inde oriuntur Æquationes Annuæ horum motuum Æquationi centri Solis proportionales. Motus autem Solis eſt in duplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe, & maxima centri Æquatio quam hæc inæqualitas generat, eſt 1 gr. 56′. 26″ prædictæ Solis Eccentricitati $16\frac{11}{16}$ congruens. Quod ſi motus Solis eſſet in triplicata ratione diſtantiæ inverſe, hæc inæqualitas generaret Æquationem maximam 2 gr. 56′. 9″. Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & Nodorum Lunæ generant, ſunt ad 2 gr. 56′. 9″, ut motus medius diurnus Apogæi & motus medius diurnus Nodorum Lunæ ſunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit Æquatio maxima medii motus Apogæi 19′. 52″: & Æquatio maxima medii motus Nodorum 9′. 27″. Additur vero Æquatio prior & ſubducitur poſterior, ubi Terra pergit a Perihelio ſuo ad Aphelium: & contrarium fit in oppoſita Orbis parte

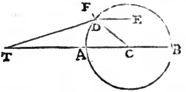
Per

Per Theoriam Gravitatis conſtitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major ſit ubi tranſverſa diameter Orbis Lunaris tranſit per Solem, quam ubi eadem ad rectos eſt angulos cum linea Terram & Solem jungente: & propterea Orbis Lunaris paulo major eſt in priore caſu quam in poſteriore. Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris, pendens a ſitu Apogæi Lunæ ad Solem, quæ quidem maxima eſt cum Apogæum Lunæ verſatur in Octante cum Sole; & nulla cum illud ad Quadraturas vel Syzygias pervenit: & motui medio additur in tranſitu Apogæi Lunæ a Solis Quadratura ad Syzygiam, & ſubducitur in tranſitu Apogæi a Syzygia ad Quadraturam. Hæc Æquatio quam Semeſtrem vocabo, in Octantibus Apogæi quando maxima eſt, aſcendit ad 3′. 45″ circiter, quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri Solis diſtantia a Terra. Augetur vero ac diminuitur in triplicata ratione diſtantiæ Solis inverſe, adeoque in maxima Solis diſtantia eſt 3′. 34″, & in minima 3′. 56″ quamproxime: ubi vero Apogæum Lunæ ſitum eſt extra Octantes, evadit minor; eſtque ad Æquationem maximam, ut ſinus duplæ diſtantiæ Apogæi Lunæ a proxima Syzygia vel Quadratura ad radium.

Per eandem Gravitatis Theoriam actio Solis in Lunam paulo major eſt ubi linea recta per Nodos Lunæ ducta tranſit per Solem, quam ubi linea ad rectos eſt angulos cum recta Solem ac Terram jungente. Et inde oritur alia medii motus Lunaris Æquatio, quam Semeſtrem ſecundam vocabo, quæque maxima eſt ubi Nodi in Solis Octantibus verſantur, & evaneſcit ubi ſunt in Syzygiis vel Quadraturis, & in aliis Nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ Nodi alterutrius a proxima Syzygia aut Quadratura: additur vero medio motui Lunæ dum Nodi tranſeunt a Solis Quadraturis ad proximas Syzygias, & ſubducitur in eorum tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas; & in Octantibus ubi maxima eſt, aſcendit ad 47″ in mediocri Solis diſtantia a Terra, uti ex Theoria Gravitatis colligo. In aliis Solis diſtantiis hæc Æquatio, in Octantibus Nodorum, eſt reciproce ut cubus diſtantiæ Solis a Terra, ideoque in Perigæo Solis ad 45″ in Apogæo ejus ad 49″ circiter aſcendit.

Per eandem Gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maxime ubi vel cum Sole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum Sole Quadraturam facit. Et Eccentricitas fit maxima in priore caſu & minima in poſteriore, per Corol. 7, 8 & 9.

7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ ſunt, & Æquationem principalem Apogæi generant, quam Semeſtrem vocabo. Et Æquatio maxima Semeſtris eſt $12^{gr.}\ 18'$ circiter, quantum ex Obſervationibus colligere potui. *Horroxius* noſter Lunam in Ellipſi circum Terram, in ejus umbilico inferiore conſtitutam, revolvi primus ſtatuit. *Halleius* centrum Ellipſeos in Epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. Et ex motu in Epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progreſſu & regreſſu Apogæi & quantitate Eccentricitatis. Dividi intelligatur diſtantia mediocris Lunæ a Terra in partes 100000, & referat *T* Terram & *TC* Eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 5505. Producatur *TC* ad *B*, ut ſit *CB* ſinus Æquationis maximæ Semeſtris $12^{gr.}\ 18'$ ad radium *TC*, & circulus *BDA* centro *C* intervallo *CB* deſcriptus, erit Epicyclus ille in quo centrum Orbis Lunaris locatur & ſecundum ordinem literarum *BDA* revolvitur. Capiatur angulus *BCD* æqualis duplo argumento annuo, ſeu duplæ diſtantiæ veri loci Solis ab Apogæo Lunæ ſemel æquato, & erit *CTD* Æquatio

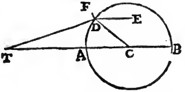


Semeſtris Apogæi Lunæ & *TD* Eccentricitas Orbis ejus in Apogæum ſecundo æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio & Apogæo & Eccentricitate, ut & Orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in Orbe & diſtantia ejus a Terra, idque per Methodos notiſſimas.

In Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum Orbis Lunæ velocius movetur circum centrum *C* quam in Aphelio, idque in triplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Ob Æquationem centri Solis in Argumento annuo comprehenſam, centrum Orbis Lunæ velocius movetur in Epicyclo *BDA* in duplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Ut idem adhuc velocius moveatur in ratione ſimplici diſtantiæ inverſe; ab Orbis centro *D* agatur recta *DE* verſus Apogæum Lunæ, ſeu rectæ *TC* parallela, & capiatur angulus *EDF* æqualis exceſſui Argumenti

menti annui prædicti ſupra diſtantiam Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in conſequentia; vel quod perinde eſt, capiatur angulus *CDF* æqualis complemento Anomaliæ veræ Solis ad gradus 360. Et ſit *DF* ad *DC* ut dupla Eccentricitas Orbis magni ad diſtantiam mediocrem Solis a Terra, & motus medius diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab Apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & $52'.\ 27''.\ 16'''$ ad $59'.\ 8''.\ 10'''$ conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et concipe centrum Orbis Lunæ locari in puncto *F*, & in Epicyclo cujus centrum eſt *D* & radius *DF* interea revolvi dum punctum *D* progreditur in circumferentia circuli *DABD*. Hac enim ratione velocitas qua centrum Orbis Lunæ in linea quadam curva circum centrum *C* deſcripta movebitur, erit reciproce ut cubus diſtantiæ Solis a Terra quamproxime, ut oportet.

Computatio motus hujus difficilis eſt, ſed facilior reddetur per approximationem ſequentem. Si diſtantia mediocris Lunæ a Terra ſit partium 100000, & Eccentricitas *TC* ſit partium 5505 ut ſupra: recta *CB* vel *CD* invenietur partium $1172\frac{3}{4}$, & recta *DF*



partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad diſtantiam *TC* ſubtendit angulum ad Terram quem tranſlatio centri Orbis a loco *D* ad locum *F* generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata in ſitu parallelo ad diſtantiam ſuperioris umbilici Orbis Lunæ a Terra, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici, & ad diſtantiam Lunæ a Terra ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu Lunæ, quique propterea Æquatio centri Secunda dici poteſt. Et hæc Æquatio in mediocri Lunæ diſtantia a Terra, eſt ut ſinus anguli quem recta illa *DF* cum recta a puncto *F* ad Lunam ducta continet quamproxime, & ubi maxima eſt evadit $2'.\ 25''$. Angulus autem quem recta *DF* & recta a puncto *F* ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel ſubducendo angulum *EDF* ab Anomalia media Lunæ, vel addendo diſtantiam Lunæ a Sole ad diſtantiam Apogæi Lunæ ab Apogæo Solis

Digitized by Google

Solis. Et ut radius eſt ad ſinum anguli ſic inventi, ita $2'.\ 25''$ ſunt ad Æquationem centri Secundam, addendam ſi ſumma illa ſit minor ſemicirculo, ſubducendam ſi major. Sic habebitur ejus Longitudo in ipſis Luminarium Syzygiis.

Si computatio accuratior deſideretur, corrigendus eſt locus Lunæ in Orbe ut ſupra inventus per Variationem duplicem. De Variatione Prima & principali diximus ſupra, hæc maxima eſt in Octantibus Lunæ. Variatio altera maxima eſt in Quadrantibus, & oritur a varia Solis actione in Orbem Lunæ pro varia poſitione Apogæi Lunæ ad Solem, computatur vero in hunc modum. Ut radius ad ſinum verſum diſtantiæ Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in conſequentia, ita angulus quidam P ad quartum proportionalem. Et ut radius ad ſinum diſtantiæ Lunæ a Sole, ita ſumma hujus quarti proportionalis & anguli cujuſdam alterius Q ad Variationem Secundam, ſubducendam ſi Lunæ lumen augetur, addendam ſi diminuitur. Sic habebitur locus verus Lunæ in Orbe, & per Reductionem loci hujus ad Eclipticam habebitur Longitudo Lunæ. Anguli vero P & Q ex Obſervationibus determinandi ſunt. Et interea ſi pro angulo P uſurpentur $2'$, & pro angulo Q $1'$, non multum errabitur.

Cum Atmoſphæra Terræ ad uſque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem Solis, & refringendo ſpargat eandem in Umbram Terræ, & ſpargendo lucem in confinio Umbræ dilatat Umbram: ad diametrum Umbræ quæ per Parallaxim prodit, addo minutum unum primum in Eclipſibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

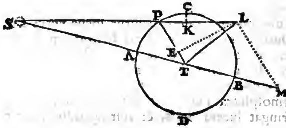
Theoria vero Lunæ primo in Syzygiis, deinde in Quadraturis, & ultimo in Octantibus per Phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios Solis & Lunæ ad tempus meridianum in Obſervatorio Regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommode ſequentes adhibebit: nempe motum medium Solis ♑ $20^{gr.}\ 43'.\ 40''$, & Apogæi ejus ♋ $7^{gr.}\ 44'.\ 30''$, & motum medium Lunæ ♒ $15^{gr.}\ 20'.\ 00''$, & Apogæi ejus ♓ $8^{gr.}\ 20'.\ 00''$, & Nodi aſcendentis ♌ $27^{gr.}\ 24'.\ 20''$; & differentiam meridianorum Obſervatorii hujus & Obſervatorii Regii *Pariſienſis* $0^{hor.}\ 9^{min.}\ 20^{ſec.}$.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis *ML* ſeu *PT*, in Quadraturis Lunaribus, ad perturbandos motus Lunares, erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis *TM*−*LM* ſeu 2*PK* in Syzygiis Lunaribus, eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem Terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro Terræ, id eſt, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis prior in ſuperficie Terræ, eſt ad vim gravitatis, ut 1 ad 38604600. Hac vi Mare deprimitur in locis quæ 90 gradibus diſtant



a Sole. Vi altera, quæ duplo major eſt, Mare elevatur & ſub Sole & in regione Soli oppoſita. Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat Aquam in regionibus quæ 90 gradibus diſtant à Sole, ſive elevet eandem in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, hæc ſumma erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum ac ſi tota in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis Mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant a Sole nil ageret.

Hæc eſt vis Solis ad Mare ciendum in loco quovis dato, ubi Sol tam in vertice loci verſatur quam in mediocri ſua diſtantia a Terra. In aliis Solis poſitionibus vis ad Mare attollendum, eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſupra horizontem loci directe & cubus diſtantiæ Solis a Terra inverſe.

Corol. Cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo

tudo Aquæ ſub Æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub Polis menſura pedum Pariſienſium 85820; vis Solaris de qua egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo Aquæ in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, ſuperet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus diſtant a Sole, menſura tantum pedis unius Pariſienſis & digitorum undecim cum octava parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85820 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad Mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum Maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtoliam*, tempore verno & autumnali totus Aquæ aſcenſus in Conjunctione & Oppoſitione Luminarium (obſervante *Samuele Sturmio*) eſt pedum plus minus 45, in Quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore verſantium & mediocriter a Terra diſtantium ſunto vires S & L, & erit $L+S$ ad $L-S$ ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* Æſtus maris (ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi*) ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo Æſtus in Syzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in Quadraturis, pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit $L+S$ ad $L-S$ ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem Æſtus in portu *Biſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, Æſtus maximi non incidunt in ipſas Luminarium Syzygias, ſed ſunt tertii a Syzygiis ut dictum fuit, ſeu proxime ſequuntur tertium Lunæ poſt Syzygias appulſum ad meridianum loci, vel potius (ut a *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt horam

ram a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, adeoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadrageſimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam ſeptimam circiter ab appulſu Lunæ ad meridianum loci; ideoque proxime ſequuntur appulſum Lunæ ad meridianum, ubi Luna diſtat a Sole vel ab oppoſitione Solis gradibus plus minus octodecim vel novendecim in conſequentia. Æſtas & Hyems maxime vigent, non in ipſis Solſtitiis, ſed ubi Sol diſtat a Solſtitiis decima circiter parte totius circuitus, ſeu gradibus plus minus 36 vel 37. Et ſimiliter maximus Æſtus maris oritur ab appulſu Lunæ ad meridianum loci, ubi Luna diſtat a Sole decima circiter parte motus totius ab Æſtu ad Æſtum. Sit diſtantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et vis Solis in hac diſtantia Lunæ a Syzygiis & Quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris a vi Lunæ oriundum, quam in ipſis Syzygiis & Quadraturis, in ratione radii ad ſinum complementi diſtantiæ hujus duplicatæ ſeu anguli graduum 37, hoc eſt, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia ſuperiore pro S ſcribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis Lunæ in Quadraturis, ob declinationem Lunæ ab Æquatore, diminui debet. Nam Luna in Quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ poſt Quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ verſatur. Et Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad Mare movendum diminuitur in duplicata ratione ſinus complementi declinationis quamproxime. Et propterea vis Lunæ in his Quadraturis eſt tantum 0,8570327 L. Eſt igitur L + 0,7986355 S ad 0,8570327 L − 0,7986355 S ut 9 ad 5.

Præterea diametri Orbis in quo Luna abſque Eccentricitate moveri deberet, ſunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque diſtantia Lunæ a Terra in Syzygiis eſt ad diſtantiam ejus in Quadraturis, ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et diſtantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ a Syzygiis ubi Æſtus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ a Quadraturis ubi Æſtus minimus generatur, ſunt ad mediocrem ejus diſtantiam, ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem Lunæ ad Mare movendum ſunt in triplicata ratione diſtantiarum inverſe, ideoque vires in maxima & minima harum diſtantiarum ſunt ad vim in mediocri diſtantia, ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522 L + 0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L − 0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis Solis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol.

Corol. 1. Cum Aqua vi Solis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum octava parte digiti, eadem vi Lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum octo, & vi utraque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi Luna eſt in Perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultra, præſertim ubi Æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes Maris motus excitandos abunde ſufficit, & quantitati motuum probe reſpondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem late patent, uti in Mari *Pacifico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In Mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, Æſtus dicuntur eſſe majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus ſit Æſtus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor eſſe debet quàm graduum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, aſcenſus aquæ intra Tropicos minor eſt quam in Zonis temperatis, propter anguſtiam Maris inter *Africam* & Auſtralem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Ea de cauſa fluxus & refluxus in Inſulis, quæ à littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſet ſolet. In Portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes S. *Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam*, & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis, per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo Æſtus reſpondet viribus Solis & Lunæ.

Corol.

Digitized by Google

De Mundi Systemate *Corol.* 2. Cum vis Lunæ ad Mare movendum, ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longe minor quam quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In Æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad Mare movendum, eſt ad Solis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per Corol. 14. Prop. LXVI. Lib. I.) ſunt ut denſitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas Lunæ erit ad denſitatem Solis, ut 4,4815 ad 1 directe & cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inverſe: id eſt (cum diametri mediocres apparentes Lunæ & Solis ſint 31′. 16½″ & 32. 12″) ut 4891 ad 1000. Denſitas autem Solis erat ad denſitatem Terræ, ut 100 ad 396; & propterea denſitas Lunæ eſt ad denſitatem Terræ, ut 4891 ad 3960 ſeu 21 ad 17. Eſt igitur corpus Lunæ denſius & magis terreſtre quam Terra noſtra.

Corol. 4. Et cum vera diameter Lunæ (ex Obſervationibus Aſtronomicis) ſit ad veram diametrum Terræ, ut 100 ad 365; erit maſſa Lunæ ad maſſam Terræ, ut 1 ad 39,371.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ, erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie Terræ.

Corol. 6. Et diſtantia centri Lunæ a centro Terræ, erit ad diſtantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,371 ad 39,371.

Corol. 7. Et mediocris diſtantia centri Lunæ a centro Terræ, erit ſemidiametrorum maximarum Terræ 60¼ quamproxime. Nam ſemidiameter maxima Terræ fuit pedum Pariſienſium 19767630, & mediocris diſtantia centrorum Terræ & Lunæ ex hujuſmodi ſemidiametris 60¼ conſtans, æqualis eſt pedibus 1190999707. Et hæc diſtantia (per Corollarium ſuperius) eſt ad diſtantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,371 ad 39,371, quæ proinde eſt pedum 1161498340. Et cum Luna revolvatur reſpectu Fixarum, diebus 27, horis 7 & minutis primis 43⅕, ſinus verſus anguli quem Luna, tempore minuti unius primi motu ſuo medio, circa commune gravitatis centrum Terræ & Lunæ deſcribit, eſt 1275235, exiſtente radio 100,000000,000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1161498340 ad pedes 14,811833. Luna igitur vi illa qua retinetur in Orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,811833. Et ſi hæc vis augeatur in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, habebitur

Digitized by Google

bebitur vis tota gravitatis in Orbe Lunæ, per Corol. Prop. III. Et hac vi Luna cadendo, tempore minuti unius primi deſcribere deberet pedes 14,89517. Et ad ſexageſimam partem hujus diſtantiæ, id eſt, ad diſtantiam pedum 19849995 a centro Terræ, corpus grave cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcribere deberet etiam pedes 14,89517. Diminuatur hæc diſtantia in ſubduplicata ratione pedum 14,89517 ad pedes 15,12028, & habebitur diſtantia pedum 19701678 a qua grave cadendo, eodem tempore minuti unius ſecundi deſcribet pedes 15,12028, id eſt, pedes 15, dig. 1, lin. 5,32. Et hac vi gravia cadunt in ſuperficie Terræ, in Latitudine urbis *Lutetiæ Pariſiorum*, ut ſupra oſtenſum eſt. Eſt autem diſtantia pedum 19701678 paulo minor quam ſemidiameter globi huic Terræ æqualis, & paulo major quam Terræ hujus ſemidiameter mediocris, ut oportet. Sed differentiæ ſunt inſenſibiles. Et propterea vis qua Luna retinetur in Orbe ſuo, ad diſtantiam maximarum Terræ ſemidiametrorum $60\frac{1}{4}$, ea eſt quam vis Gravitatis in ſuperficie Terræ requirit.

Corol. 8. Diſtantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, eſt mediocrium Terræ ſemidiametrorum $60\frac{1}{5}$ quamproxime. Nam ſemidiameter mediocris, quæ erat pedum 19688725, eſt ad ſemidiametrum maximam pedum 19767630, ut $60\frac{1}{4}$ ad $60\frac{1}{5}$ quamproxime.

In his computationibus Attractionem magneticam Terræ non conſideravimus, cujus utique quantitas perparva eſt & ignoratur. Siquando vero hæc Attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in Meridiano, ac longitudines Pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum Maris, & parallaxis Lunæ cum diametris apparentibus Solis & Lunæ ex Phænomenis accuratius determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire Figuram corporis Lunæ.

Si corpus Lunare fluidum eſſet ad inſtar Maris noſtri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, eſſet ad vim Lunæ, qua Mare noſtrum in partibus & ſub Luna & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diame-

Digitized by Google

 diametrum Terræ conjunctim; id eſt, ut 39,371 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, ſeu 1079 ad 100. Unde cum Mare noſtrum vi Lunæ attollatur ad pedes $8\frac{3}{5}$, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes $93\frac{1}{4}$. Eaque de cauſa Figura Lunæ Sphærois eſſet, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum Terræ, & ſuperaret diametros perpendiculares exceſſu pedum 187. Talem igitur Figuram Luna affectat, eamque ſub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Corol. Inde vero fit ut eadem ſemper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus Lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium agitantium, eſſent longè tardiſſimæ: adeo ut facies illa, quæ Terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem in Prop. XVII. allatam reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in Terram converti.

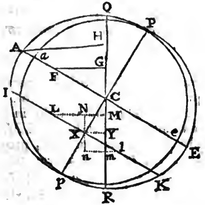
LEMMA I.

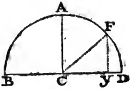
Si APEp *Terram deſignet uniformiter denſam, centroque* C *&* *Polis* P, p *&* *Æquatore* AE *delineatam; & ſi centro* C *radio* CP *deſcribi intelligatur Sphæra* Pape; *ſit autem* QR *planum, cui recta a centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter inſiſtit; & Terræ totius exterioris* PapAPepE, *quæ Sphæra modò deſcripta altior eſt, particulæ ſingulæ conentur recedere hinc inde a plano* QR, *ſitque conatus particulæ cujuſque ut ejuſdem diſtantia a plano: Dico primo, quod tota particularum omnium, in Æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, vis & efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, ſit ad totam particularum totidem in Æquatoris puncto* A, *quod a plano* QR *maxime diſtat, conſiſtentium vim & efficaciam, ad Terram conſimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iſte circularis circum axem, in communi ſectione Æquatoris & plani* QR *jacentem, peragetur.*

Nam centro *C* diametro *BD* deſcribatur ſemicirculus *BAFDC*. Dividi intelligatur ſemicircumferentia *BAD* in partes

Digitized by Google

partes innumeras æquales, & a partibus ſingulis F ad diametrum BD demittantur ſinus FY. Et ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus FY æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus omnibus CY, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris CF; adeoque ſumma quadratorum ex omnibus FY, erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris CF.





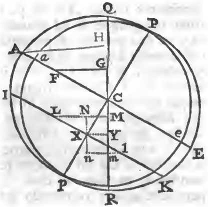
Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque F ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & a puncto A perpendiculum AH. Et vis qua particula F recedit a plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam CG, erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Adeoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$, hoc eſt, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis ſuis F, erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut ſumma omnium FCq ad ſummam totidem ACq, hoc eſt, (per jam demonſtrata) ut unum ad duo. *Q.E.D.*

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano QR, idque æqualiter ab utraque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli Æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo QR quam in plano Æquatoris jacentem.

LEMMA II.

Iiſdem poſitis: Dico ſecundo quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique ſitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, ſit ad vim totam particularum totidem, in Æquatoris circulo AE, *uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, ad Terram conſimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.*

Sit enim IK circulus quilibet minor Æquatori AE parallelus, ſintque L, l particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum $Pape$ ſitæ. Et ſi in planum QR, quod radio in Solem ducto perpendiculare eſt, demittantur perpendicula LM, lm: vires totæ quibus particulæ illæ fugiunt planum QR, proportionales erunt perpendiculis illis LM, lm. Sit autem recta Ll plano $Pape$ parallela & biſecetur eadem in X, & per punctum X agatur Nn, quæ parallela ſit plano QR & perpendi-



culis LM, lm occurrat in N ac n, & in planum QR demittatur perpendiculum XY. Et particularum L & l vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, ſunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc eſt, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$, ſeu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC$ $-NM$

$-NM\times mC$: & harum differentia $LN\times Mm-NM\times\overline{MC+mC}$, eſt vis particularum ambarum ſimul ſumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN\times Mm$ ſeu $2LN\times NX$, eſt ad particularum duarum ejuſdem magnitudinis in A conſiſtentium vim $2AH\times HC$, ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM\times\overline{MC+mC}$ ſeu $2XY\times CY$, ad particularum earundem in A conſiſtentium vim $2AH\times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id eſt, particularum duarum L & l ſimul ſumptarum vis ad Terram rotandam, eſt ad vim particularum duarum iiſdem æqualium & in loco A conſiſtentium, ad Terram itidem rotandam, ut $LXq-CXq$ ad ACq. Sed ſi circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2, (per Lem. I.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2CXq$ ad $2ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK, ſunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq-2CXq$ ad $2ACq$: & propterea (per Lem. I.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq-2CXq$ ad ACq.

Jam vero ſi Sphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus inſiſtant circuli totidem IK, materia in perimetro circuli cujuſque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut IXq in $IXq-2CXq$. Et vis materiæ ejuſdem, ſi in circuli AE perimetro conſiſteret, eſſet ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium conſiſtentis, eſt ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE conſiſtentis, ut omnia IXq in $IXq-2CXq$ ad totidem IXq in ACq, hoc eſt, ut omnia $ACq-CXq$ in $ACq-3CXq$ ad totidem $ACq-CXq$ in ACq, id eſt, ut omnia $ACqq-4ACq\times CXq+3CXqq$ ad totidem $ACqq-ACq\times CXq$, hoc eſt, ut tota quantitas fluens cujus fluxio eſt $ACqq-4ACq\times CXq+3CXqq$, ad totam quantitatem fluentem cujus fluxio eſt $ACqq-ACq\times CXq$; ac proinde per Methodum Fluxionum, ut $ACqq\times CX-\frac{4}{3}ACq\times CXcub+\frac{3}{5}CXqc$ ad $ACqq\times CX-\frac{1}{3}ACq\times CXcub$, id eſt, ſi pro CX ſcribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15}ACqc$ ad $\frac{2}{3}ACqc$, hoc eſt, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

De Mundi Systemate

LEMMA III.

Iiſdem poſitis: Dico tertio quod motus Terræ totius circum axem jam ante deſcriptum, ex motibus particularum omnium compoſitus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem, in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcunque ad duo quadrata ex diametro; id eſt, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *ad numerum* 1000000.

Eſt enim motus Cylindri circum axem ſuum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inſcriptæ & ſimul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuiſſimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iſte circum axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejuſdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus Terra omni reliqua ſublata, ſolus in Orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem ſuum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ *inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium ſive annulus iſte fluidus eſſet, ſive is ex materia rigida & firma conſtaret.*

PRO-

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire Præceſſionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, erat $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}$. & hujus dimidium $8''.\ 17'''.\ 38^{iv}.\ 18^{v}$. (ob rationes ſupra explicatas) eſt motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto ſidereo $20^{gr.}\ 11'.\ 46''$. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim $20^{gr.}\ 11'.\ 46''$. in antecedentia; & ſi plures eſſent Lunæ motus Nodorum cujuſque, per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent ut tempora periodica; ſi Luna ſpatio diei ſiderei juxta ſuperficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad $20^{gr.}\ 11'.\ 46''$. ut dies ſidereus horarum 23. 56′. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id eſt, ut 1436 ad 39343. Et par eſt ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; ſive Lunæ illæ ſe mutuo non contingant, ſive liqueſcant & in annulum continuum formentur, ſive denique annulus ille rigeſcat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iſte, quoad quantitatem materiæ, æqualis ſit Terræ omni *PapAPepE* quæ globo *Pape* ſuperior eſt; (*Vid. Fig. pag.* 434.) & quoniam globus iſte eſt ad Terram illam ſuperiorem ut *aCqu.* ad *ACqu.*−*aCqu.* id eſt (cum Terræ diameter minor *PC* vel *aC* ſit ad diametrum majorem *AC* ut 229 ad 230,) ut 52441 ad 459; ſi annulus iſte Terram ſecundum Æquatorem cingeret & uterque ſimul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli eſſet ad motum globi interioris (per hujus Lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc eſt, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli eſſet ad ſummam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde ſi annulus globo adhæreat, & motum ſuum quo ipſius Nodi ſeu puncta Æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui reſtabit in annulo erit ad ipſius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum Æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum Æquinoctialium corporis ex annulo & globo compoſiti, ad motum

20 gr.

 $20^{gr.}$ $11'$. $46''$, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id eſt, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut ſupra explicui) atque adeo quibus puncta Æquinoctialia annuli regrediuntur (id eſt vires 3 *IT*, *in Fig. pag.* 403 & 404.) ſunt in ſingulis particulis ut diſtantiæ particularum à plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. II.) ſi materia annuli per totam globi ſuperficiem, in morem figuræ *PapAPepE*, ad ſuperiorem illam Terræ partem conſtituendam ſpargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta Æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus Æquinoctiorum regreſſus jam eſſet ad $20^{gr.}$ $11'$. $46''$, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret $9''$. $56'''$. 50^{iv}.

Cæterum hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ, minuendus eſt, idque in ratione ſinus 91706 (qui ſinus eſt complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad Radium 100000. Qua ratione motus iſte jam fiet $9''$. $7'''$. 20^{iv}. Hæc eſt annua Præceſſio Æquinoctiorum a vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad Mare movendum erat ad vim Solis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et vis Lunæ ad Æquinoctia movenda, eſt ad vim Solis in eadem proportione. Indeque prodit annua Æquinoctiorum Præceſſio a vi Lunæ oriunda $40''$. $52'''$. 52^{iv}; ac tota Præceſſio annua a vi utraque oriunda $50''$. $00'''$. 12^{iv}. Et hic motus cum Phænomenis congruit. Nam Præceſſio Æquinoctiorum ex Obſervationibus Aſtronomicis eſt minutorum ſecundorum plus minus quinquaginta.

Si altitudo Terræ ad Æquatorem ſuperet altitudinem ejus ad Polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & Præceſſio Æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Deſcripſimus jam Syſtema Solis, Terræ, Lunæ, & Planetarum: ſupereſt ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

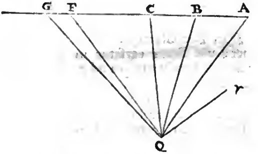
LEMMA

Digitized by Google

LEMMA IV.

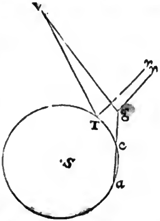
Cometas eſſe Luna ſuperiores & in regione Planetarum verſari.

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas ſupra regiones ſublunares, ſic ex Parallaxi annua convincitur eorum deſcenſus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum ſunt omnes, ſub exitu apparitionis, aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi Terra eſt inter ipſos & Solem; at juſto celeriores ſi Terra vergit ad oppoſitionem. Et e contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi Terra verſatur inter ipſos & Solem; & juſto tardiores vel retrogradi ſi Terra ſita eſt ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu Terræ in vario ipſius ſitu, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conſpirante vel contrario, nunc retrogradi ſunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem tanto celerius fertur, ut recta per Terram & Cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra Cometam, Cometa e Terra ſpectatus, ob motum ſuum tardiorem, apparet eſſe retrogradus; ſin Terra tardius fertur, motus Cometæ,



(detracto motu Terræ) fit ſaltem tardior. At ſi Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado diſtantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sunto *♈QA*, *♈QB*, *♈QC* obſervatæ tres longitudines Cometæ, ſub initio motus, ſitque *♈QF* longitudo ultimo obſervata, ubi Cometa videri deſinit. Agatur

Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut ſit *AG* ad *AB* ut tempus inter obſervationem primam & ultimam, ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur *QG*. Et ſi Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quieſceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus ♈*QG* longitudo Cometæ tempore Obſervationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, ſi Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈*QG*, & ſic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in eaſdem partes cum Terra, eidem ſubducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a Cometæ motu inæquabili in Orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero Cometæ ex hac parallaxi ſic colligitur. Deſignet *S* Solem, *acT* Orbem magnum, *a* locum Terræ in obſervatione prima, *c* locum Terræ in obſervatione tertia, *T* locum Terræ in obſervatione ultima, & *T*♈ lineam rectam verſus principium Arietis ductam. Sumatur angulus ♈*TV* æqualis angulo ♈*QF*, hoc eſt, æqualis longitudini Cometæ ubi Terra verſatur in *T*. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut ſit *ag* ad *ac* ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem Terra tempore obſervationis ultimæ, motu in recta *ac* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur *g*♈ ipſi *T*♈ parallela, & capiatur angulus ♈*gV* angulo ♈*QG* æqualis, erit hic angulus ♈*gV* æqualis longitudini Cometæ e loco *g* ſpectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur a tranſlatione Terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus *V* Orbe Jovis inferior eſſe ſolet.



Idem

Digitized by Google

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine curſus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex Parallaxi, propterea quod reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes Cometas ſatis longe infra Jovem. Unde conſequens eſt quod in Perigæis & Periheliis, ubi propius adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis a Sole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicata ratione diſtantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam a Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam Planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe & ratione ſubduplicata lucis ad lucem inverſe. Sic minima capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum ſexdecim pedum a *Flamſtedio* obſervata & Micrometro menſurata, æquabat $2'. 0''$. Nucleus autem ſeu ſtella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum $11''$ vel $12''$. Luce vero & claritate capitis ſuperabat caput Cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi $21''$, adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter eſſet $30''$: erit diſtantia Cometæ ad diſtantiam Saturni ut 1 ad $\surd 4$ inverſe, & $12''$ ad $30''$ directe, id eſt, ut 24 ad 30 ſeu 4 ad 5. Rurſus Cometa anni 1665 menſe *Aprili*, ut author eſt *Hevelius*, claritate ſua pene Fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi $6'$, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore interme-

dio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii Cometarum raro ſuperet 8′ vel 12′, diameter vero nuclei ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas haſce ut plurimum ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non raro conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; manifeſtum eſt quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi ſint, vel non longe ſupra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illuſtrari deberent a Sole noſtro, quam Planetæ, qui hic ſunt, illuſtrantur a Stellis fixis.

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem Cometarum per fumum illum maxime copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtuſe ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis a ſe reflexa Planetas æmuletur. Inde veriſimile fit Cometas longe infra ſphæram Saturni deſcendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per Æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia Cometarum, ne fumus a capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur ſi concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illuſtrabitur a Sole, adeoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita ſub Sole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum a Terra Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu a Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior Anni 1665 (obſervante *Hevelio*,) ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de

de motu ſuo apparente, adeoque præterierat Perigæum; Splendor vero capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa radiis Solaribus obtectus deſiit apparere. Cometa Anni 1683, obſervante eodem *Hevelio*, in fine Menſis *Julii* ubi primum conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in Orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad *Sept.* 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis Micrometro menſurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. eſſe tantum 6′. 5″ incluſa coma, at *Sept.* 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius a Sole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Menſis *Decembris*, & iſte Anni 1680 circa finem ejuſdem Menſis, celerrime movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contigit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis Solaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1. majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in Perigæo exiſtens) magnitudine parum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & a *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris, in diſtantia novem graduum a Sole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26. velociſſime motus, inque Perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori Pegaſi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut Stella quartæ, *Jan.* 9. ut Stella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem Lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat Stellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia a Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales a Terra diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga Solis maxime ſplenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque ſitu differentia, concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux Cometarum

 regularis

regularis eſſe ſolet, & maxima apparere ubi capita velociſſime moventur, atque adeo ſunt in Perigæis; niſi quatenus ea major eſt in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis a ſe reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturnum, deberent ſæpius apparere in partibus Soli oppoſitis. Forent enim Terræ viciniores qui in his partibus verſarentur, & Sol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verum percurrendo hiſtorias Cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in Hemiſphærio Solem verſus, quam in Hemiſphærio oppoſito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur a Sole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quam ſint ipſo Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem deſcripti pars longe major ſita eſt a latere Terræ quod Solem reſpicit; inque parte illa majore Cometæ, Soli ut plurimum viciniores, magis illuminari ſolent.

Corol. 3. Hinc etiam manifeſtum eſt, quod Cœli reſiſtentia deſtituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam curſui Planetarum contrarias ſecuti, moventur omnifariam liberrime, & motus ſuos etiam contra curſum Planetarum, diutiſſime conſervant. Fallor ni genus Planetarum ſint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora eſſe volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmoſphæris ingentibus cinguntur; & Atmoſphæræ inferne denſiores eſſe debent. Unde nubes ſunt, non ipſa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ viſuntur. Sic Terra ſi e Planetis ſpectaretur, luce nubium ſuarum proculdubio ſplenderet, & corpus firmum ſub nubibus prope deliteſceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata eſt, quæ ſitum mutant inter ſe, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum ſub Atmoſphæris & profundioribus & craſſioribus abſcondi debent.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales deſcribere.

Patet per Corol. 1. Propoſ. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc ſi Cometæ in orbem redeunt: Orbes erunt Ellipſes, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione ſeſquiplicata. Ideoque Cometæ maxima ex parte ſupra Planetas verſantes, & eo nomine Orbes axibus majoribus deſcribentes, tardius revolventur. Ut ſi axis Orbis Cometæ ſit quadruplo major axe Orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id eſt, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ, abſque erroribus ſenſibilibus, adhiberi poſſint.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis, erit ſemper ad velocitatem Planetæ cujuſvis circa Solem in circulo revolventis, in ſubduplicata ratione duplæ diſtantiæ Planetæ a centro Solis, ad diſtantiam Cometæ a centro Solis quamproxime. Ponamus radium Orbis magni, ſeu Ellipſeos in qua Terra revolvitur ſemidiametrum maximam, eſſe partium 100000000: & Terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa in eadem Telluris a Sole diſtantia mediocri, ea cum velocitate quæ ſit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in ſubduplicata ratione diſtantiarum reciproce, ideoque datur.

Corol. 4. Unde ſi Latus rectum Parabolæ quadruplo majus ſit radio Orbis magni, & quadratum radii illius ponatur eſſe partium 100000000: area quam Cometa radio ad Solem ducto ſingulis diebus deſcribit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & ſingulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus ſit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eadem ratione ſubduplicata.

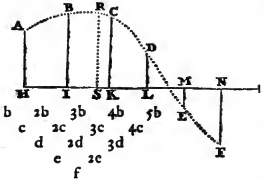
LEMMA

LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa $A, B, C, \mathcal{D}, E, F$, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam HN demitte perpendicula quotcunque AH, BI, CK, $\mathcal{D}L$, EM, FN.

Caſ. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia ſunt intervalla HI, IK, KL, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c. ſecundas c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias d, $2d$, $3d$, &c. id eſt, ita ut ſit $AH-BI=b$, $BI-CK=2b$, $CK-\mathcal{D}L=3b$, $\mathcal{D}L+EM=4b$, $-EM+FN=5b$, &c. dein $b-2b=c$, &c. & ſic pergatur ad differentiam ultimam quæ hic eſt f. Deinde erecta quacunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic $AH=a$, $-HS=p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS=q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK=r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL=s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM=t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probe obſervatis, erit $RS=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.



Caſ. 2. Quod ſi punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia ſint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; ſecundas per intervalla bina diviſas c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias per intervalla terna diviſas d, $2d$, $3d$, &c. quartas per inter-

Digitized by Google

intervalla quaterna diviſas e, $2e$, &c. & ſic deinceps; id eſt, ita ut ſit $b=\frac{AH-BI}{HI}$, $2b=\frac{BI-CK}{IK}$, $3b=\frac{CK-\mathcal{D}L}{KL}$, &c. dein $c=\frac{b-2b}{HK}$, $2c=\frac{2b-3b}{IL}$, $3c=\frac{3b-4b}{KM}$, &c. Poſtea $d=\frac{c-2c}{HL}$, $2d=\frac{2c-3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic $AH=a$, $-HS=p$, p in $-IS=q$, q in $+SK=r$, r in $+SL=s$, s in $+SM=t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri poſſunt quamproxime. Nam ſi curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quam proxime cum area curvæ illius quadrandæ. Poteſt autem Parabola, per Methodos notiſſimas, ſemper quadrari Geometrice.

LEMMA VI.

Ex obſervatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Deſignent HI, IK, KL, LM tempora inter obſervationes, (*in Fig. præced.*) HA, IB, KC, $L\mathcal{D}$, ME obſervatas quinque longitudines Cometæ, HS tempus datum inter obſervationem primam & longitudinem quæſitam. Et ſi per puncta $A, B, C, \mathcal{D}, E$ duci intelligatur curva regularis $ABC\mathcal{D}E$; & per Lemma ſuperius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæſita.

Eadem methodo ex obſervatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum obſervatarum parvæ ſint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; ſuffecerint obſervationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores ſint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt obſervationes quinque adhiberi.

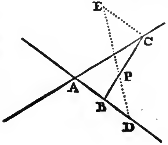
LEMMA

Digitized by Google

LEMMA VII.

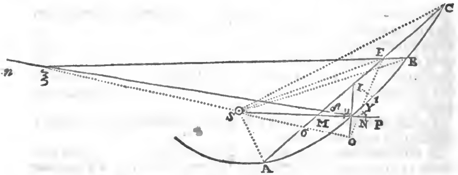
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus poſitione datis* AB, AC *abſciſſæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem verſus rectam alteram *AC* uſque ad *E*, ut ſit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipſi *AD* parallela ſit *EC*; & ſi agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q.E.F.*



LEMMA VIII.

Sit ABC *Parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *biſecta in* I *abſcindatur ſegmentum* ABCI, *cujus diameter ſit* Iμ *&* *vertex* μ. *In* Iμ *producta capiatur* μO *æqualis dimidio ipſius*



Iμ. *Jungatur* OS, *& producatur ea ad* ξ, *ut ſit* Sξ *æqualis* 2SO. *Et ſi Cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* ξB *ſecans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abſcindet de chorda* AC *ſegmentum* AE *tempori proportionale quamproxime.*

Junga-

Jungatur enim EO ſecans arcum Parabolicum ABC in Υ, & agatur μX quæ tangat eundem arcum in vertice μ & actæ EO occurrat in X; & erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $AC\Upsilon\mu A$ ut AE ad AC. Ideoque cum triangulum ASE ſit ad triangulum ASC in eadem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASC\Upsilon\mu A$ ut AE ad AC. Cum autem ξO ſit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eadem ratione, erit SX ipſi EB parallela: & propterea ſi jungatur BX, erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. Unde ſi ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum EXB, & de ſumma auferatur triangulum SEB, manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque adeo ad aream $ASC\Upsilon\mu A$ ut AE ad AC. Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis eſt area $ASB\Upsilon\mu A$ quamproxime, & hæc area $ASB\Upsilon\mu A$ eſt ad aream $ASC\Upsilon\mu A$, ut tempus deſcripti arcus AB ad tempus deſcripti arcus totius AC. Ideoque AE eſt ad AC in ratione temporum quamproxime. *Q.E.D.*

Corol. Ubi punctum B incidit in Parabolæ verticem μ, eſt AE ad AC in ratione temporum accurate.

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ ſecans AC in δ, & in ea capiatur ξn quæ ſit ad μB ut $27MI$ ad $16M\mu$: acta Bn ſecabit chordam AC in ratione temporum magis accurate quam prius. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ, ſi punctum B magis diſtat a vertice principali Parabolæ quam punctum μ; & citra, ſi minus diſtat ab eodem vertice.

LEMMA IX.

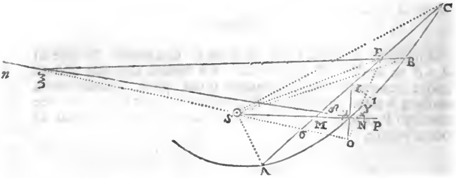
Rectæ $I\mu$ *&* μM *& longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter ſe.*

Nam $4S\mu$ eſt latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem μ.

LEMMA X.

Si producatur Sμ *ad* N *&* P, *ut* μN *ſit pars tertia ipſius* μI, *&* SP *ſit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ. *Cometa, quo tempore deſcribit arcum* AμC, *ſi progrederetur ea ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* SP *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam ſi Cometa velocitate quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ; area quam radio ad punctum *S* ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ Parabolicæ $ASC\mu$. Ideoque contentum ſub longitudine in tangente deſcripta & longitudine $S\mu$, eſſet ad contentum ſub longitudinibus *AC* & *SM*, ut area $ASC\mu$ ad triangulum *ASCM*, id eſt, ut *SN* ad *SM*. Quare *AC* eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut $S\mu$ ad *SN*. Cum autem velocitas



Cometæ in altitudine *SP* ſit (per Corol. 6. Prop. XVI. Lib. I.) ad velocitatem in altitudine $S\mu$, in ſubduplicata ratione *SP* ad $S\mu$ inverſe, id eſt, in ratione $S\mu$ ad *SN*; longitudo hac velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut $S\mu$ ad *SN*. Igitur *AC* & longitudo hac nova velocitate deſcripta, cum ſint ad longitudinem in tangente deſcriptam in eadem ratione, æquantur inter ſe. *Q.E.D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3}I\mu$, eodem tempore deſcriberet chordam *AC* quamproxime.

LEMMA

Digitized by Google

LEMMA XI.

Si Cometa motu omni privatus de altitudine SN *ſeu* $S\mu+\frac{1}{3}I\mu$ *demitteretur, ut caderet in Solem, & ea ſemper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem, qua urgetur ſub initio; idem ſemiſſe temporis quo in Orbe ſuo deſcribat arcum* AC, *deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam Cometa quo tempore deſcribat arcum Parabolicum AC, eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine SP (per Lemma noviſſimum) deſcribet chordam AC, adeoque (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) eodem tempore in Circulo cujus ſemidiameter eſſet SP, vi gravitatis ſuæ revolvendo, deſcriberet arcum cujus longitudo eſſet ad arcus Parabolici chordam AC, in ſubduplicata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine SP, cadendo de altitudine illa in Solem, deſcriberet ſemiſſe temporis illius (per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I.) ſpatium æquale quadrato ſemiſſis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id eſt, ſpatium $\frac{AIq}{4SP}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine SN, ſit ad ipſius pondus in Solem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: Cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in Solem cadendo, deſcribet ſpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, id eſt, ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

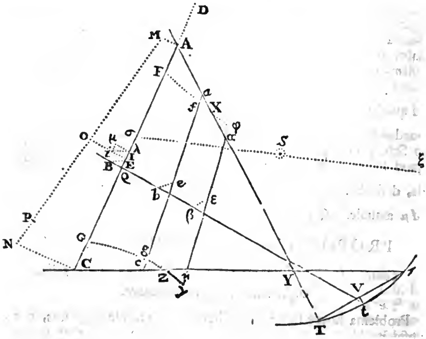
Cometæ in Parabola moti Trajectoriam ex datis tribus Obſervationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimode aggreſſus, compoſui Problemata quædam in Libro primo quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime diſtantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet

ut temporum differentia ſit ad ſummam temporum, ut ſumma temporum ad dies plus minus ſexcentos; vel ut punctum *E* incidat in punctum *M* quamproxime, & inde aberret verſus *I* potius quam verſus *A*. Si tales obſervationes non præſto ſint, inveniendus eſt novus Cometæ locus per Lemma ſextum.

Deſignent *S* Solem, *T*, *t*, *τ* tria loca Terræ in Orbe magno, *TA*, *tB*, *τC* obſervatas tres longitudines Cometæ, V tempus inter obſervationem primam & ſecundam, W tempus inter ſecundam ac tertiam, X longitudinem quam Cometa toto illo tempore, ea cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole diſtantia, deſcribere poſſet, quæque per Corol. 3. Prop. xl. Lib. III. invenienda eſt, & *tV* perpendiculum in chordam *Tτ*. In longi-



tudine media *tB* ſumatur utcunque punctum *B* pro loco Cometæ in plano Eclipticæ, & inde verſus Solem *S* ducatur linea *BE*, quæ ſit ad ſagittam *tV*, ut contentum ſub *SB* & *St quad.* ad cubum hypotenuſæ trianguli rectanguli, cujus latera ſunt *SB* & tangens latitudinis Cometæ in obſervatione ſecunda ad radium *tB*.

Et

Digitized by Google

Et per punctum E agatur (per hujus Lem. vii.) recta AEC, cujus partes AE, EC ad rectas TA & τC terminatæ, ſint ad invicem ut tempora V & W: & erunt A & C loca Cometæ in plano Eclipticæ in obſervatione prima ac tertia quamproxime, ſi modo B ſit locus ejus recte aſſumptus in obſervatione ſecunda.

Ad AC biſectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipſi AC parallelam. Junge occultam Si ſecantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per Solem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, a puncto B verſus punctum ξ duc occultam novam BE, quæ ſit ad priorem BE in duplicata ratione diſtantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eadem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes AE & EC ſint ad invicem, ut tempora inter obſervationes V & W. Et erunt A & C loca Cometæ magis accurate.

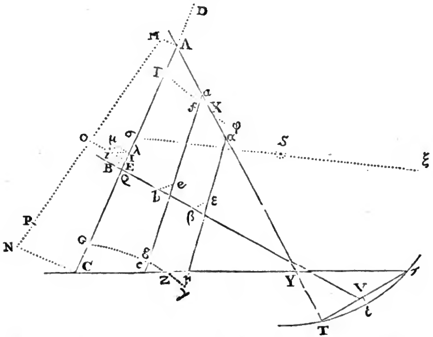
Ad AC biſectam in I erigantur perpendicula AM, CN, IO, quarum AM & CN ſint tangentes latitudinum in obſervatione prima ac tertia ad radios TA & τC. Jungatur MN ſecans IO in O. Conſtituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA producta capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$, & agatur occulta OD. Deinde in MN verſus N capiatur MP, quæ ſit ad longitudinem ſupra inventam X, in ſubduplicata ratione mediocris diſtantiæ Telluris a Sole (ſeu ſemidiametri Orbis magni) ad diſtantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N; erunt A, B, C tria loca Cometæ, per quæ Orbis ejus in plano Eclipticæ deſcribi debet. Sin punctum P non incidat in punctum N; in recta AC capiatur CG ipſi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad eaſdem partes rectæ NC jaceant.

Eadem methodo qua puncta E, A, C, G, ex aſſumpto puncto B inventa ſunt, inveniantur ex aſſumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e, a, c, g, & ϵ, α, κ, γ. Deinde ſi per G, g, γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, ſecans rectam τC in Z: erit Z locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et ſi in AC, ac, $\alpha\kappa$ capiantur AF, af, $\alpha\varphi$ ipſis CG, cg, $\kappa\gamma$ reſpective æquales, & per puncta F, f, φ ducatur circumferentia circuli $Ff\varphi$, ſecans rectam AT in X; erit punctum X alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo Cometæ in Orbe proprio. Denique (per Prop. xix. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo deſcribatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q.E.I.*

Con-

Digitized by Google

Conſtructionis hujus demonſtratio ex Lemmatibus conſequitur: quippe cum recta AC ſecetur in E in ratione temporum, per Lemma VII, ut oportet per Lem. VIII: & BE per Lem. XI. ſit pars rectæ BS vel $B\xi$ in plano Eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per Corol. Lem. X.) longitudo ſit chordæ arcus, quem Cometa in Orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi MN æqualis fuerit, ſi modo B ſit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.



Cæterum puncta B, b, β non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQt, in quo veſtigium Orbis in plano Eclipticæ deſcriptum ſecat rectam tB, præterpropter innoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ ſit ad $\frac{4}{3}T\tau$ in ſubduplicata ratione SQ ad St. Et agendo rectam SEB cujus pars EB æquetur longitudini Vt, determinabitur punctum B quod prima vice uſurpare licet. Tum recta AC deleta & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ducta, & inventa

inventa inſuper longitudine MP; in tB capiatur punctum b, ea lege, ut ſi TA, τC ſe mutuo ſecuerint in Y, ſit diſtantia Yb ad diſtantiam YB, in ratione compoſita ex ratione MP ad MN & ratione ſubduplicata SB ad Sb. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β, ſi modo operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum ſuffecerint. Nam ſi diſtantia Bb perexigua obvenerit; poſtquam inventa ſunt puncta F, f & G, g, actæ rectæ Ff & Gg ſecabunt TA & τC in punctis quæſitis X & Z.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum a *Flamſtedio* obſervatum Tabula ſequens exhibet.

		Tem. appar.	Temp. verum	Long. Solis	Long. Cometæ	Lat. Cometæ
		h. ′	h. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″
1680 *Dec.*	12	4.46	4.46. 0	♑ 1.51.23	♑ 6.31.21	8.26. 0
	21	6.32½	6.36.59	11. 6.44	♒ 5. 7.38	21.45.30
	24	6.12	6.17.52	14. 9.26	18.49.10	25.23.24
	26	5.14	5.20.44	16. 9.22	28.24. 6	27. 0.57
	29	7.55	8. 3. 2	19.19.43	♓ 13.11.45	28.10. 5
	30	8. 2	8.10.26	20.21. 9	17.39. 5	28.11.12
1681 *Jan.*	5	5.51	6. 1.38	26.22.18	♈ 8.49.10	26.15.26
	9	6.49	7. 0.53	♒ 0.29. 2	18.43.18	24.12.42
	10	5.54	6. 6.10	1.27.43	20.40.57	23.44. 0
	13	6.56	7. 8.55	4.33.20	25.59.34	22.17.36
	25	7.44	7.58.42	16.45.36	♉ 9.35.48	17.56.54
	30	8. 7	8.21.53	21.49.58	13.19.36	16.40.57
Feb.	2	6.20	6.34.51	24.46.59	15.13.48	16. 2. 2
	5	6.50	7. 4.41	27.49.51	16.59.52	15.27.23

His adde Obſervationes quaſdam e noſtris.

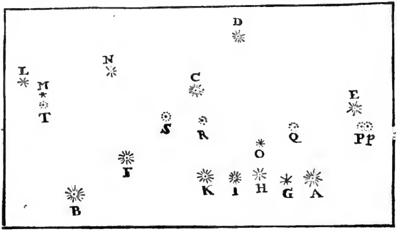
		Temp. appar.	Cometæ Longit.	Com. Lat.
Febr.	25	$8^{h}.30'$	♉ $26^{gr}.18'.17''$	$12^{gr}.46'\frac{7}{8}$
	27	8 .15	27 . 4 .24	12 .$36\frac{1}{5}$
Mart.	1	11 . 0	27 .53 . 6	12 .$24\frac{6}{7}$
	2	8 . 0	28 .12 .27	12 .20
	5	11 .30	29 .20 .51	12 . $3\frac{1}{2}$
	9	8 .30	♊ 0 .43 . 4	11 .$45\frac{7}{8}$

Hæ Obſervationes Teleſcopio ſeptupedali, & Micrometro filiſque in foco Teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumentis

&

Digitized by Google

& poſitiones fixarum inter ſe & poſitiones Cometæ ad fixas determinavimus. Deſignet *A* ſtellam in ſiniſtro calcaneo Perſei (*Bayero* o) *B* ſtellam ſequentem in ſiniſtro pede (*Bayero* ζ) & *C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O* ſtellas alias minores in eodem pede. Sintque *P, Q, R, S, T* loca Cometæ in obſervationibus ſupra deſcriptis: & exiſtente diſtantia *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$,



DI $53\frac{5}{11}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta tranſibat inter ſtellas *D* & *E*, ſic ut diſtantia ſtellæ *D* ab hac recta eſſet $\frac{1}{6}$*CD*. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta tranſibat per ſtellam *H*. His determinabantur poſitiones fixarum inter ſe.

Die Veneris *Feb.* 25. St. vet. Hor. $8\frac{1}{2}$ P. M. Cometæ in *p* exiſtentis diſtantia a ſtella *E* erat minor quam $\frac{1}{13}$*AE*, major quam $\frac{1}{5}$*AE*, adeoque æqualis $\frac{1}{14}$*AE* proxime; & angulus *ApE* nonnihil obtuſus erat, ſed fere rectus. Nempe ſi demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, diſtantiæ Cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$*pE*.

Eadem nocte, hora $9\frac{1}{2}$, Cometæ in *P* exiſtentis diſtantia a ſtella *E* erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$*AE*, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$*AE*, adeoque æqualis

Digitized by Google

lis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ *AE*, ſeu $\frac{8}{39}$ *AE* quamproxime. A perpendiculo autem a ſtella *A* ad rectam *PE* demiſſo, diſtantia Cometæ erat $\frac{4}{5}$ *PE*.

Die ☉is, *Feb.* 27. hor. $8\frac{3}{4}$ P.M. Cometæ in *Q* exiſtentis diſtantia a ſtella *O* æquabat diſtantiam ſtellarum *O* & *H*, & recta *QO* producta tranſibat inter ſtellas *K* & *B*. Poſitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes, magis accurate definire non potui.

Die ♂tis, *Mart* 1, hor. 11. P.M. Cometa in *R* exiſtens, ſtellis *K* & *C* accurate interjacebat, & rectæ *CRK* pars *CR* paulo major erat quam $\frac{1}{3}CK$, & paulo minor quam $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{8}CR$, adeoque æqualis $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{16}CR$ ſeu $\frac{16}{45}CK$.

Die ☿ii, *Mart.* 2. hor. 8. P.M. Cometæ exiſtentis in *S*, diſtantia a ſtella *C* erat $\frac{4}{9}FC$ quamproxime. Diſtantia ſtellæ *F* a recta *CS* producta erat $\frac{1}{24}FC$; & diſtantia ſtellæ *B* ab eadem recta, erat quintuplo major quam diſtantia ſtellæ *F*. Item recta *NS* producta tranſibat inter ſtellas *H* & *I*, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ *H* quam ſtellæ *I*.

Die ♄ni, *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. P.M. Cometa exiſtente in *T*, recta *MT* æqualis erat $\frac{1}{2}ML$, & recta *LT* producta tranſibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quam *B*, auferens a *BF* quintam vel ſextam ejus partem verſus *F*. Et *MT* producta tranſibat extra ſpatium *BF* ad partes ſtellæ *B*, quadruplo propior exiſtens ſtellæ *B* quam ſtellæ *F*. Erat *M* ſtella perexigua quæ per Teleſcopium videri vix potuit, & *L* ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

Ex hujuſmodi obſervationibus per conſtructiones figurarum & computationes (poſito quod ſtellarum *A* & *B* diſtantia eſſet $2^{gr.}\ 6'.\ 46''$, & ſtellæ *A* longitudo ♉ $26^{gr.}\ 41'.\ 50''$ & latitudo borealis $12^{gr.}\ 8'\frac{1}{2}$, ſtellæque *B* longitudo ♉ $28^{gr.}\ 40'.\ 24''$ & latitudo borealis $11^{gr.}\ 17'\frac{2}{10}$;) derivabam longitudines & latitudines Cometæ. Micrometro parum affabre conſtructo uſus ſum, ſed longitudinum tamen & latitudinum errores (quatenus ab obſervationibus noſtris oriantur) dimidium minuti unius primi vix ſuperant, præterquam in obſervatione ultima *Mart.* 9. ubi poſitiones ſtellarum minus accurate determinare potui. *Caſſinus* qui aſcenſionem rectam Cometæ eodem tempore obſervavit, declinationem ejus tanquam invariatam manentem parum diligenter definivit. Nam Cometa (juxta obſervationes noſtras) in fine

 motus ſui notabiliter deflectere cœpit boream verſus, a parallelo quem in fine Menſis *Februarii* tenuerat.

Jam ad Orbem Cometæ determinandum, ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis tres, quas *Flamſtedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni St partium 9842,1 & Vt partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter Orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo tB partium 5657, inveni SB 9747, BE prima vice 412, $S\mu$ 9503, $i\lambda$ 413: BE ſecunda vice 421, OD 10186, X 8528,4, MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem ſecundam collegi diſtantiam tb 5640. Et per hanc operationem inveni tandem diſtantias TX 4775 & τZ 11322. Ex quibus Orbem definiendo, inveni Nodos ejus deſcendentem in ♋ & aſcendentem in ♑ 1 gr. 53′; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61 gr. 20′⅓; verticem ejus (ſeu Perihelium Cometæ) diſtare a Nodo 8 gr. 38′, & eſſe in ♐ 27 gr. 43′ cum latitudine auſtrali 7 gr. 34′; & ejus latus rectum eſſe 236,8, areamque radio ad Solem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585, quadrato ſemidiametri Orbis magni poſito 100000000; Cometam vero in hoc Orbe ſecundum ſeriem ſignorum proceſſiſſe, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′. P. M. in vertice Orbis ſeu Perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula ſinuum naturalium collectas, determinavi Graphice; conſtruendo Schema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter Orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis 16⅓ pedis Anglicani.

Tandem ut conſtaret an Cometa in Orbe ſic invento vere moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc Orbe ad obſervationum quarundam tempora: uti in Tabula ſequente videre licet.

	Diſtant. Cometæ a Sole	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obſ.	Lat. Obſ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr. ′	gr. ′	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♑ 6 . 32	8 . 18½	♑ 6 . 31⅓	8 . 26	+ 1	− 7½
29	8403	♓ 13 . 13⅔	28 . 0	♓ 13 . 11¼	28 . 10 1/12	+ 2	− 10 1/12
Febr. 5	16669	♉ 17 . 0	15 . 29⅔	♉ 16 . 59⅞	15 . 27⅖	+ 0	+ 2¼
Mar. 5	21737	29 . 19¾	12 . 4	29 . 20 6/7	12 . 3½	− 1	+ ½

Poſtea vero *Halleius* noſter Orbitam, per calculum Arithmeticum, accuratius determinavit quam per deſcriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum Nodorum in ♋ & ♑ 1 gr. 53′, & Inclinationem plani Orbitæ ad Eclipticam 61 gr. 20′⅓, ut & tempus Perihelii Cometæ *Decemb.* 8d. 0h. 4′: diſtantiam vero Perihelii

helii a Nodo aſcendente, in Orbita Cometæ menſuratam, invenit eſſe 9^gr 20′, & Latus rectum Parabolæ eſſe 243 partium, exiſtente mediocri Solis a Terra diſtantia partium 10000. Et ex his datis, calculo itidem Arithmetico accurate inſtituto, loca Cometæ ad obſervationum tempora computavit, ut ſequitur.

	Tempus verum	Diſtantia Cometæ a ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
	d. h. ′ ″		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec.	12 . 4 . 46 . 0	28028	♑ 6 . 29 . 25	8 . 26 . 0 Bor.	−1 . 56	+0 . 0
	21 . 6 . 36 . 59	61076	♒ 5 . 6 . 30	21 . 43 . 20	−1 . 8	−2 . 10
	24 . 6 . 17 . 52	70008	18 . 48 . 20	25 . 22 . 40	−0 . 50	−0 . 44
	26 . 5 . 20 . 44	75576	28 . 22 . 45	27 . 1 . 36	−1 . 21	+0 . 39
	29 . 8 . 3 . 2	84021	♓ 13 . 12 . 40	28 . 10 . 10	+0 . 55	+0 . 5
	30 . 8 . 10 . 26	86661	17 . 40 . 5	28 . 11 . 20	+1 . 0	+0 . 8
Jan.	5 . 6 . 1 . 38	101440	♈ 8 . 49 . 49	26 . 15 . 15	+0 . 39	−0 . 11
	9 . 7 . 0 . 53	110959	18 . 44 . 36	24 . 12 . 54	+1 . 18	+0 . 12
	10 . 6 . 6 . 10	113162	20 . 41 . 0	23 . 44 . 10	+0 . 3	+0 . 10
	13 . 7 . 8 . 55	120000	26 . 0 . 21	22 . 17 . 30	+0 . 47	−0 . 6
	25 . 7 . 58 . 42	145370	♉ 9 . 33 . 40	17 . 57 . 55	−2 . 8	+1 . 1
	30 . 8 . 21 . 53	155303	13 . 17 . 41	16 . 42 . 7	−1 . 55	+1 . 10
Feb.	2 . 6 . 34 . 51	160951	15 . 11 . 11	16 . 4 . 15	−2 . 37	+2 . 13
	5 . 7 . 4 . 41	166686	16 . 58 . 25	15 . 29 . 13	−1 . 27	+1 . 50
	25 . 8 . 19 . 0	202570	26 . 15 . 46	12 . 48 . 0	−2 . 31	+1 . 8
Mar.	5 . 11 . 21 . 0	216205	29 . 18 . 35	12 . 5 . 40	−2 . 16	+2 . 10

Apparuit etiam hic Cometa menſe *Novembri* præcedente, & die undecimo hujus menſis ſtylo veteri, ad horam quintam matutinam, *Cantuariæ* in *Anglia*, viſus fuit in ♍ 12½ cum latitudine boreali 2^gr. circiter. Craſſiſſima fuit hæc Obſervatio: meliores ſunt quæ ſequuntur.

Nov. 17, ſt. vet. *Ponthæus* & ſocii hora ſexta matutina *Romæ* (id eſt, hora 5, 10′ *Londini*) filis ad fixas applicatis Cometam obſervarunt in ≏ 8. 30′, cum latitudine auſtrali 0^gr. 40′. Extant eorum Obſervationes in tractatu quem *Ponthæus*, de hoc Cometa, in lucem edidit. *Cellius* qui aderat & obſervationes ſuas in Epiſtola ad *D. Caſſinum* miſit, Cometam eadem hora vidit in ≏ 8^gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0^gr. 30′. Eadem hora *Galletius* etiam Cometam vidit in ≏ 8^gr. ſine latitudine.

Nov. 18. hora matutina 6. 30′ *Romæ* (id eſt, hora 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* Cometam vidit in ≏ 13^gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1^gr. 20′. *Cellius* in ≏ 13^gr. 00′, cum latitudine auſtrali 1^gr. 00′. *Galletius* autem hora matutina 5. 30′ *Romæ*, Cometam vidit in ≏ 13^gr. 00′, cum latitudine auſtrali 1^gr. 00′. Et *R. P. Ango* in Academia *Flexienſi* apud *Gallos*, hora quinta matutina (id eſt, hora 5, 9′ *Londini*) Cometam vidit in medio inter ſtellas

Digitized by Google

duas parvas, quarum una media eſt trium in recta linea in Virginis auſtrali manu, & altera eſt extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in ♎ 12. 46′, cum latitudine auſtrali 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Nova-Anglia* in Latitudine 42¼ graduum, hora quinta matutina, (id eſt *Londini* hora matutina 9. 44′) Cometa viſus eſt prope ♎ 14, cum latitudine auſtrali 1 gr. 30′, uti a *Cl. Halleio* accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, Cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat a Spica ♍ quaſi 2 gr. Boreazephyrum verſus. Eodem die hor. 5. mat. *Boſtoniæ* in *Nova-Anglia*, Cometa diſtabat a Spica ♍ gradu uno, differentia latitudinum exiſtente 40′. Eodem die in Inſula *Jamaica*, Cometa diſtabat a Spica intervallo quaſi gradus unius. Et ex his obſervationibus inter ſe collatis colligo, quod hora 9. 44′. *Londini*, Cometa erat in ♎ 18 gr. 40′, cum latitudine auſtrali 1 gr. 18′ circiter. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in confinio *Virginiæ* in Lat. 38½ gr. hora quinta matutina (id eſt, hora 10ᵃ *Londini*) Cometam vidit ſupra Spicam ♍, & cum Spica propemodum conjunctum, exiſtente diſtantia inter eoſdem quaſi ¾ gr.. Obſervator idem, eadem hora diei ſequentis, Cometam vidit quaſi 2 gr. inferiorem Spica. Congruent hæ obſervationes cum obſervationibus in *Nova-Anglia* & *Jamaica* factis, ſi modo diſtantiæ (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die priore ſuperior eſſet Spica ♍, altitudine 1 gr. circiter, ac die poſteriore inferior eadem ſtella, altitudine perpendiculari 3 gr. 40′.

Nov. 20. D. *Montenarus* Aſtronomiæ Profeſſor *Paduenſis*, hora ſexta matutina *Venetiis* (id eſt, hora 5. 10′ *Londini*) Cometam vidit in ♎ 23 gr., cum latitudine auſtrali 1 gr. 30′. Eodem die *Boſtoniæ*, diſtabat Cometa a Spica ♍, 4 gr. longitudinis in orientem, adeoque erat in ♎ 23 gr. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & ſocii hor. mat. 7¼ Cometam obſervarunt in ♎ 27 gr. 50′, cum latitudine auſtrali 1 gr. 16′; *Ango* hora quinta matutina in ♎ 27 gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27 gr. 51′. Eodem die in Inſula *Jamaica*, Cometa viſus eſt prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica Virginis, id eſt, 2 gr. 2′.

Nov. 22. Cometa viſus eſt a *Montenaro* in ♏ 2. 33′. *Boſtoniæ* autem in *Nova-Anglia* apparuit in ♏ 3 gr. circiter, eadem fere cum latitudine ac prius, id eſt, 1 gr. 30′. Eodem die *Londini*,

hora

Digitized by Google

hora mat. 6½ *Hookius* noſter Cometam vidit in ♏ 3 gr. 30′ circiter, idque in linea recta quæ tranſit per Spicam Virginis & Cor Leonis, non exacte quidem, ſed a linea illa paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea a Cometa per Spicam ducta, hoc die & ſequentibus tranſibat per auſtrale latus Cordis Leonis, interpoſito perparvo intervallo inter Cor Leonis & hanc lineam. Linea recta per Cor Leonis & Spicam Virginis tranſiens, Eclipticam ſecuit in ♍ 3 gr. 46′, in angulo 2 gr. 51′. Et ſi Cometa locatus fuiſſet in hac linea in ♏ 3 gr., ejus latitudo fuiſſet 2 gr. 26′. Sed cum Cometa conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil diſtaret ab hac linea boream verſus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex obſervatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem Spicæ ♍, eratque 1 gr. 30′ circiter, & conſentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuo augebatur, ideoque jam ſenſibiliter major erat quam 1 gr. 30′. Inter limites autem jam conſtitutos 2 gr. 26′ & 1 gr. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1 gr. 58′ circiter. Cauda Cometæ, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad Spicam ♍, declinans aliquantulum a Stella iſta, juxta *Hookium* in auſtrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit ſenſibilis, & Cauda Æquatori fere parallela exiſtens, aliquantulum deflectebatur ab oppoſitione Solis boream verſus.

Nov. 24. Ante ortum Solis Cometa viſus eſt a *Montenaro* in ♏ 12 gr. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per Cor Leonis & Spicam Virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2 gr. 38′. Hæc latitudo uti diximus, ex obſervationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuo augebatur; ideoque jam paulo major erat quam 1 gr. 58′; & magnitudine mediocri, abſque notabili errore, ſtatui poteſt 2 gr. 18′. Latitudinem *Pontheus* & *Galletius* jam decreviſſe volunt, & *Cellius* & Obſervator in *Nova-Anglia* eandem fere magnitudinem retinuiſſe, ſcilicet gradus unius vel unius cum ſemiſſe. Craſſiores ſunt obſervationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præſertim quæ per Azimuthos & Altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores ſunt eæ quæ per poſitiones Cometæ ad fixas a *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & Obſervatore in *Nova-Anglia*, & nonnunquam a *Ponthæo* & *Cellio* ſunt factæ.

Jam collatis Obſervationibus inter ſe, colligere videor quod Cometa hoc menſe circulum fere maximum deſcripſit, ſecantem Eclipticam in ♍ 25. 12′, idque in angulo 3 gr. 12′ quamproxime. Nam & *Montenarus* Orbitam ab Ecliptica in auſtrum, tribus ſaltem

De Mundi Syſtemate

tem gradibus declinaſſe dicit. Et cognita curſus poſitione, longitudines Cometæ ex obſervationibus collectæ, ad incudem jam revocari poſſunt & melius nonnunquam determinari, ut fit in ſequentibus. *Cellius* Novemb. 17. obſervavit diſtantiam Cometæ a Spica ♍, æqualem eſſe diſtantiæ ejus a ſtella lucida in dextra ala Corvi: & hinc locandus eſt Cometa in interſectione hujus circuli quem Cometa motu apparente deſcripſit, cum circulo maximo qui a fixis illis duabus æqualiter diſtat, atque adeo in ♎ 7$^{gr.}$ 54′, cum latitudine auſtrali 43′. Præterea *Montenarus, Novemb.* 20. hora ſexta matutina *Venetiis*, Cometam vidit non totis quatuor gradibus diſtantiam a Spica; dicitque hanc diſtantiam, vix æquaſſe diſtantiam ſtellarum duarum lucidarum in alis Corvi, vel duarum in juba Leonis, hoc eſt 3$^{gr.}$ & 30′ vel 32′. Sit igitur diſtantia Cometæ a Spica 3$^{gr.}$ 30′, & Cometa locabitur in ♎ 22$^{gr.}$ 48′, cum latitudine auſtrali 1$^{gr.}$ 30′. Adhæc *Montenarus, Novemb.* 21, 22, 24 & 25 ante ortum Solis, Sextante æneo quintupedali ad minuta prima & ſemiminuta diviſo & vitris Teleſcopicis armato, diſtantias menſuravit Cometæ a Spica 8$^{gr.}$ 28′, 13$^{gr.}$ 10′, 23$^{gr.}$ 30′, & 28$^{gr.}$ 13′: & has diſtantias, per refractionem nondum correctas, addendo longitudini Spicæ, collegit Cometam his temporibus fuiſſe in ♎ 27$^{gr.}$ 51′, ♏ 2$^{gr.}$ 33′, ♏ 12$^{gr.}$ 52′ & ♏ 17$^{gr.}$ 45′. Si diſtantiæ illæ per refractiones corrigantur, & ex diſtantiis correctis differentiæ longitudinum inter Spicam & Cometam probe deriventur, locabitur Cometa his temporibus in ♎ 27$^{gr.}$ 52′, ♏ 2$^{gr.}$ 36′, ♏ 12$^{gr.}$ 58′ & ♏ 17$^{gr.}$ 53′ circiter. Latitudines autem ad has longitudines in via Cometæ captas, prodeunt 1$^{gr.}$ 45′, 1$^{gr.}$ 58′, 2$^{gr.}$ 22′ & 2$^{gr.}$ 31′. Harum quatuor obſervationum horas matutinas *Montenarus* non poſuit. Priores duæ ante horam ſextam, poſteriores (ob viciniam Solis) poſt ſextam factæ videntur. Die 22, ubi Cometa ex obſervatione *Montenari* locatur in ♏ 2$^{gr.}$ 36′, *Hookius* noſter eundem locavit in ♏ 3$^{gr.}$ 30′ ut ſupra. *Montenarus* in defectu, *Hookius* in exceſſu erraſſe videntur. Nam Cometa, ex ſerie obſervationum, jam fuit in ♏ 2$^{gr.}$ 56′ vel ♏ 3$^{gr.}$ circiter.

Obſervationum ſuarum ultimam inter vapores & diluculum captam, *Montenarus* ſuſpectam habebat. Et *Cellius* eodem tempore (id eſt, *Novem.* 25) Cometam per ejus Altitudinem & Azimuthum locavit in ♏ 15$^{gr.}$ 47′, cum latitudine auſtrali quaſi gradus unius. Sed *Cellius* obſervavit etiam eodem tempore, quod Cometa erat in linea recta cum ſtella lucida in dextro femore Vir-

Virginis & cum Lance auſtrali Libræ, & hæc linea ſecat viam Cometæ in ♏ 18 gr. 36′. *Ponthæus* etiam eodem tempore obſervavit, quod Cometa erat in recta tranſeunte per Chelam auſtrinam Scorpii & per ſtellam quæ Lancem borealem ſequitur: & hæc recta ſecat viam Cometæ in ♏ 16 gr. 34′. Obſervavit etiam, quod Cometa erat in recta tranſeunte per ſtellam ſupra Lancem auſtralem Libræ & ſtellam in principio pedis ſecundi Scorpii: & hæc recta ſecat viam Cometæ in ♏ 17 gr. 55′. Et inter longitudines ex his tribus Obſervationibus ſic derivatas, longitudo mediocris eſt ♏ 17 gr. 42′, quæ cum obſervatione *Montenari* ſatis congruit.

Erravit igitur *Cellius* jam locando Cometam in ♏ 15 gr. 47′, per ejus Azimuthum & Altitudinem. Et ſimilibus Azimuthorum & Altitudinum obſervationibus, *Cellius* & *Ponthæus* non minus erraverunt locando Cometam in ♏ 20 & ♏ 24 diebus duobus ſequentibus, ubi ſtellæ fixæ ob diluculum vix aut ne vix quidem apparuere. Et corrigendæ ſunt hæ obſervationes per additionem duorum graduum, vel duorum cum ſemiſſe.

Ex omnibus autem Obſervationibus inter ſe collatis & ad meridianum *Londini* reductis, colligo Cometam hujuſmodi curſum quamproxime deſcripſiſſe.

Temp. med. ſt. vet.	Long. Cometæ	Lat. Cometæ
d. h. ′	gr. ′	gr. ′
Nov. 16.17.10	♎ 8.0	0.44 Auſt.
17.17.10	12.52	1.0
18.21.44	18.40	1.18
19.17.10	22.48	1.30
20.17 fere	27.52	1.45
21.17 fere	♏ 2.56	1.58
23.17¾ fere	12.58	2.20
24.17½ fere	17.53	2.29
26.18.00	26 vel 27 gr.	2.42

Loca autem Cometæ in Orbe Parabolico computata, ita ſe habent.

Temp. verum	Diſt. Com. a ☉	Long. comp.	Lat. comp.
d. h. ′		gr. ′ ″	gr. ′ ″
Nov. 16.17.0	83920	♎ 8.0.25	0.43.20 Auſt.
18.21.34	78020	18.41.50	1.17.30
20.16.50	73012	27.59.40	1.44.25
23.17.5	64206	♏ 13.19.15	2.21.8
26.17.0	54799	26.46.30	2.42.30

Con-

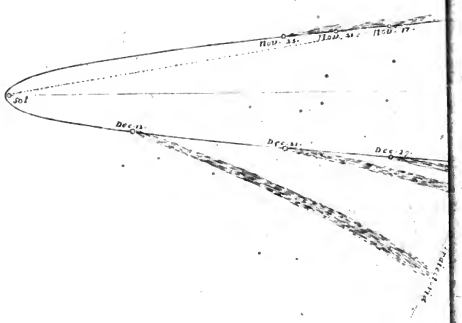
Digitized by Google

Congruunt igitur Obſervationes Aſtronomicæ, tam menſe *Novembri* quam menſibus quatuor ſequentibus, cum motu Cometæ circum Solem in Trajectoria hacce Parabolica, atque adeo unum & eundem Cometam fuiſſe, qui menſe *Novembri* ad Solem deſcendit, & menſibus ſequentibus ab eodem aſcendit, abunde confirmant, ut & hunc Cometam in Trajectoria hacce Parabolica delatum fuiſſe quamproxime. Menſibus *Decembri*, *Januario*, *Februario* & *Martio*, ubi Obſervationes hujus Cometæ ſunt ſatis accuratæ, congruunt eædem cum motu ejus in hac Trajectoria, non minus accurate quam obſervationes Planetarum congruere ſolent cum eorum Theoriis. Menſe *Novembri*, ubi obſervationes ſunt craſſæ, errores non ſunt majores quam qui craſſitudini obſervationum tribuantur. Trajectoria Cometæ bis ſecuit planum Eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam ſecuit non in oppoſitis cœli partibus, ſed in fine Virginis & principio Capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque curſus Cometæ plurimum deflectebatur a Circulo maximo. Nam & menſe *Novembri* curſus ejus tribus ſaltem gradibus ab Ecliptica in auſtrum declinabat, & poſtea menſe *Decembri* gradibus 29 vergebat ab Ecliptica in ſeptentrionem, partibus duabus Orbitæ in quibus Cometa tendebat in Solem & redibat a Sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut obſervavit *Montenarus*. Pergebat hic Cometa per ſigna fere novem, a Virginis ſcilicet duodecimo gradu ad principium Geminorum, præter ſignum Leonis per quod pergebat antequam videri cœpit: & nulla alia extat Theoria, qua Cometa tantam Cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maxime inæquabilis. Nam circa diem vigeſimum *Novembris*, deſcripſit gradus circiter quinque ſingulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, ſpatio ſcilicet dierum quindecim cum ſemiſſe, deſcripſit gradus tantum 40; poſtea vero motu iterum accelerato, deſcripſit gradus fere quinque ſingulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et Theoria quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probe reſpondet, quæque eaſdem obſervat leges cum Theoria Planetarum, & cum accuratis obſervationibus Aſtronomicis accurate congruit, non poteſt non eſſe vera. Cometa tamen ſub finem motus deviabat aliquantulum ab hac Trajectoria Parabolica verſus axem Parabolæ, ut ex erroribus minuti unius primi duorumve in latitudinem menſe *Februario* & *Martio* conſpirantibus, colligere videor; & propterea in Orbe Elliptico

Digitized by Google

Digitized by Google

Pag. 465.



Digitized by Google

liptico circum Solem movebatur, ſpatio annorum pluſquam quingentorum, quantum ex erroribus illis judicare licuit, revolutionem peragens.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa deſcripſit, & Caudam veram quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano Trajectoriæ optice delineatas exhibere: Obſervationibus ſequentibus in Cauda definienda adhibitis.

Nov. 17 Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18 Cauda $30^{gr.}$ longa, Solique directe oppoſita in *Nova-Anglia* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam δ, quæ tunc erat in ♍ $9^{gr.}\ 54'$. *Nov.* 19 in *Mary-Land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10 Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in Aquilæ auſtrali ala, & deſinebat prope ſtellas *A*, ω, *b* in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ $19\frac{1}{2}^{gr.}$ cum latitudine boreali $34\frac{1}{4}^{gr.}$ circiter. *Dec.* 11 ſurgebat ad uſque caput Sagittæ (*Bayero*, α, β,) deſinens in ♑ $26^{gr.}\ 43'$, cum latitudine boreali $38^{gr.}\ 34'$. *Dec.* 12 tranſibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, deſinens in ♒ $4^{gr.}$, cum latitudine boreali $42\frac{1}{2}^{gr.}$ circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, hora 5, 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra Cygni Uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hac ſtella ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat a Stella illa $2^{gr.}\ 15'$ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ $22^{gr.}$ cum latitudine boreali $61^{gr.}$. *Dec.* 21 ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans a β & *Schedir*, & diſtantiam ab utraque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, adeoque deſinens in ♓ $24^{gr.}$ cum latitudine $47\frac{1}{2}^{gr.}$. *Dec.* 29 tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accurate complebat, & longa erat $54^{gr.}$ adeoque deſinebat in ♉ $19^{gr.}$ cum latitudine $35^{gr.}$. *Jan.* 5 tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus ſuum dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta Obſervationes noſtras) longa erat $40^{gr.}$; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum, & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum

 octo.

Digitized by Google

octo. *Jan.* 13 Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuiſſima deſinebat e regione ſtellæ x in latere *Perſei*. Diſtantia termini caudæ a circulo Solem & Cometam jungente erat 3 gr. 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum 8½ gr. *Jan.* 25 & 26 luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi cœlum valde ſerenum erat, luce tenuiſſima & ægerrime ſenſibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali Aurigæ accurate, adeoque declinabat ab oppoſitione Solis boream verſus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10 Caudam oculis armatis aſpexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7 ſe caudam ad longitudinem graduum 12 vidiſſe ſcribit.

Orbem jam deſcriptum ſpectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolventi, haud difficulter conſtabit quod corpora Cometarum ſunt ſolida, compacta, fixa ac durabilia ad inſtar corporum Planetarum. Nam ſi nihil aliud eſſent quam vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce in tranſitu ſuo per viciniam Solis ſtatim diſſipari debuiſſet. Eſt enim calor Solis ut radiorum denſitas, hoc eſt, reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a Sole. Ideoque cum diſtantia Cometæ a centro Solis *Decemb.* 8 ubi in Perihelio verſabatur, eſſet ad diſtantiam Terræ a centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æſtivi apud nos ut 1000000 ad 36, ſeu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis eſt quaſi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æſtivum Solem, ut expertus ſum: & calor ferri candentis (ſi recte conjector) quaſi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in Perihelio verſantem ex radiis Solaribus concipere poſſet, quaſi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omniſque materia volatilis ſtatim conſumi ac diſſipari debuiſſent.

Cometa igitur in Perihelio ſuo calorem immenſum ad Solem concepit, & calorem illum diutiſſime conſervare poteſt. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem ſuum omnem ſpatio horæ unius in aere conſiſtens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conſervaret in ratione diametri, propterea quod ſuperficies (ad cujus menſuram per contactum aeris ambientis

entis

entis refrigeratur) in illa ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id eſt, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio Caloris, ob cauſas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porro notandum eſt quod Cometa Menſe *Decembri*, ubi ad Solem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quam antea Menſe *Novembri*, ubi Perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ e Cometis oriuntur, ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu nucleus Cometæ per calorem ſuum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex eſt opinio; eas vel jubar eſſe Solis per tranſlucida Cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius a capite Cometæ in Terram, vel denique nubem eſſe ſeu vaporem a capite Cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes a Sole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientia rerum Opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur e pulverum & fumorum particulis per aerem ſemper volitantibus: adeoque in aere fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortius ferit; in aere clariore tenuius eſt & ægrius ſentitur: in cœlis autem abſque materia reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quatenus in jubare eſt, ſed quatenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce Solis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux Fixarum & Planetarum diſtincte ad nos tranſmiſſa, demonſtrat medium cœleſte nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur Fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id quoniam rariſſime contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum Oculorum tum Aeris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo Teleſcopiis

 evane-

Digitized by Google

evaneſcunt. Aeris & aſcendentium vaporum tremore fit ut radii facile de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde eſt quod ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos abſque omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in Cometis cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas Fixarum non cerni: ſciendum eſt quod lux Fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus Teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ vero nullæ: Cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa: ſic enim Cometa Anni 1680, Menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſua vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda vero luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſima, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultra: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per Teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$ P.M. *Londini*, verſabatur in ♓ $8^{gr.}\ 41'$ cum latitudine boreali $28^{gr.}\ 6'$, Sole exiſtente in ♑ $18^{gr.}\ 26'$. Et Cometa Anni 1577, *Dec.* 29 verſabatur in ♓ $8^{gr.}\ 41'$ cum latitudine boreali $28^{gr.}\ 40'$, Sole etiam exiſtente in ♑ $18^{gr.}\ 26'$ circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ (ex meis & aliorum Obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione Solis aquilonem verſus; in poſteriore vero (ex Obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, ſupereſt ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem a capitibus oriri & in regiones a Sole averſas aſcendere confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quod in planis

Digitized by Google

planis Orbium Cometarum per Solem tranſeuntibus jacentes, deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes, quas capita in Orbibus illis progredientia relinquunt. Quod ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus a Sole directe averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad Orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeo quod cauda convexo ſui latere partes reſpicit a quibus fit deviatio, quæque in recta ſunt linea a Sole per caput Cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores & limite minus indiſtincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in qua caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed a capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel oblique ſi corpus moveatur in latus: ita in Cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel recta petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel oblique, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit a quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De Caudarum agitionibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel a mutationibus Aeris noſtri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obſcurantium oriantur; vel forte a partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapo-

De Mundi Systemate Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum Atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate Aeris noſtri. Nam Aer juxta ſuperficiem Terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus quam Aqua ejuſdem ponderis, ideoque Aeris columna cylindrica pedes 850 alta, ejuſdem eſt ponderis cum Aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. * Columna autem Aeris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam Aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius Aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam Aquæ altam pedes 32. Inde vero (ex Hypotheſi multis experimentis confirmata, quod compreſſio Aeris ſit ut pondus Atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a centro Terræ) computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod Aer, ſi aſcendatur a ſuperficie Terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quam apud nos in ratione longe majori, quam ſpatii omnis infra Orbem Saturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus Aeris noſtri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones ad uſque ſphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum Aer adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma ſeu Atmoſphæra Cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit quam ſuperficies nuclei, deinde cauda adhuc altius aſcendat, debebit cauda eſſe quam rariſſima. Et quamvis, ob longe craſſiorem Cometarum Atmoſphæram, magnamque corporum gravitationem Solem verſus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in ſe mutuo, fieri poſſit ut Aer in ſpatiis cœleſtibus inque Cometarum caudis non adeo rareſcat; perexiguam tamen quantitatem Aeris & vaporum, ad omnia illa caudarum Phænomena abunde ſufficere, ex hac computatione perſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris luce Solis ſplendens, craſſitudine ſua paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat & extinguit penitus: per immenſam vero caudarum craſſitudinem, luce pariter Solari illuſtratam, aſtra minima abſque claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur. Neque major eſſe ſolet caudarum plurimarum ſplendor, quam Aeris noſtri in tenebroſo cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo

Quo temporis ſpatio vapor a capite ad terminum caudæ aſcendit, cognoſci fere poteſt ducendo rectam a termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi recta aſcendat a Sole, aſcendere cœpit a capite quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non recta aſcendit à Sole, ſed motum Cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit oblique. Unde verior erit Problematis ſolutio, ut recta illa quæ Orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, aſcendere cœperat a capite ante *Dec.* 11, adeoque aſcenſu ſuo toto dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10, apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui a tempore Perihelii Cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio in vicinia Solis celerrime aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni conſtabat qui a tempore Perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non prius evanuit quam ob nimiam ſuam tam a Sole illuſtrante quam ab oculis noſtris diſtantiam videri deſiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuo a capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, a capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere ſub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rurſus colligitur ſpatia cœleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolum ſolida Planetarum & Cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrime peragunt ac diutiſſime conſervant.

Aſcenſum caudarum ex Atmoſphæris capitum & progreſſum in partes a Sole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longe tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt a ratione prorſus alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ, impeditiſſimis in regionibus noſtris, a radiis Solis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam a Sole aſcendere.

Digitized by Google

dere. Cum autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideoque ſervata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu Aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit a Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram æthercam cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem ſuam ſpecificam qua prius tendebat in Solem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur a Sole recedere, at Solis Atmoſphæra & materia cœlorum vel plane quieſcit, vel motu ſolo quem a Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in vicinia Solis, ubi Orbes curviores ſunt, & Cometæ intra denſiorem & ea ratione graviorem Solis Atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quam longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant a capitibus Solem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel ſimul in Solem cadunt, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem a cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque, facillime accipiant & poſtea liberrime ſervent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum Periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad Solem caudæ novæ breviuſculæ lento motu a capitibus propagari debebunt, & ſubinde, in Periheliis Cometarum illorum qui aduſque Atmoſphæram Solis deſcendunt, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuo rareſcit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem

riorem

Digitized by Google

riorem latior ſit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem ſuam attrahi & cum eorum Atmoſphæris miſceri, rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad conſtitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copioſe ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in Planetis, requiri videntur Cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur, continuo ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino creſcunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, niſi aliunde augmentum ſumerent, perpetuo decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porro ſuſpicor Spiritum illum, qui Aeris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmoſphæræ Cometarum in deſcenſu eorum in Solem, excurrendo in caudas, diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem reſpicit) anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum a Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; ſi modo Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in Atmoſphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus, craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus a Sole ac Terra diſtantiis, obſcurius apparuit poſt Perihelium ſuum quam antea. Menſe enim *Decembri* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at Menſe *Novembri* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumque viderant, majorem deſcribunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigienſi, Novemb.* 19, Cometa hicce luce ſua quantumvis plumbea & obtuſa, æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quam poſtea. Et *D. Storer* literis quæ in manus noſtras incidere, ſcripſit caput ejus Menſe *Decembri*, ubi caudam

Ppp maxi-

Digitized by Google

maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longe cedere Cometæ, qui Menſe *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur, quod materia capitis ſub initio copioſior eſſet, & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, apparuerint ſubobſcura & exigua. Nam Anno 1668 *Mart.* 5. St. nov. hora ſeptima veſpertina *R. P. Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occaſum Solis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, cauda vero ſupra modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus e mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolum dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id eſt, gradus 45) occupaſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra Horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt quod caput a Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et ſimilis legitur Cometa anni 1101 vel 1106, *cujus Stella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad Orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio Menſis *Februarii*, circa veſperam, ad occaſum Solis brumalem. Inde vero & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Pariſienſis, *diſtabat quaſi cubito uno, ab hora tertia* [rectius ſexta] *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens*. Talis etiam erat ardentiſſimus ille Cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus Lib. I. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante Solem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente vero die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minima fieri poteſt diſtantia Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ ſcilicet] *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita eſt* [capiti] *Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* [id eſt, ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem*

tempore

Digitized by Google

tempore hyberno, & aſcendens uſque ad cingulum Orionis ibi evanuit. Cometa ille anni 1618, qui e radiis Solaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare vel paulo ſuperare videbatur, ſed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquaſſe traduntur.

Diximus Cometas eſſe genus Planetarum in Orbibus valde eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum e Planetis non caudatis, minores eſſe ſolent qui in Orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, ſic etiam Cometas, qui in Periheliis ſuis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores eſſe, ne Solem attractione ſua nimis agitent, rationi conſentaneum videtur. Orbium vero tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione Cometarum in iiſdem Orbibus poſt longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio Propoſitio ſequens lumen accendere poteſt.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Trajectoriam Cometæ Graphice inventam corrigere.

Oper. 1. Aſſumatur poſitio plani Trajectoriæ, per Propoſitionem ſuperiorem Graphice inventa; & ſeligantur tria loca Cometæ obſervationibus accuratiſſimis definita, & ab invicem quam maxime diſtantia; ſitque A tempus inter primam & ſecundam, ac B tempus inter ſecundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo verſari convenit, vel ſaltem non longe a Perigæo abeſſe. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes Trigonometricas, loca tria vera Cometæ in aſſumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. inſtitutas, deſcribatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis a Sole ad loca inventa ductis terminatæ, ſunto D & E; nempe D area inter obſervationem primam & ſecundam, & E area inter ſecundam ac tertiam. Sitque T tempus totum quo area tota D+E, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, deſcribi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex

 præ-

De Mundi Systemate prædictis tribus Cometæ locis obſervatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut ſupra:) deinde etiam Orbis per loca illa tranſiens, & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint d & e, nec non tempus totum t quo area tota $d+e$ deſcribi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex obſervatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbiſque per loca illa tranſiens, ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ϵ, & tempus totum τ quo area tota $\delta+\epsilon$ deſcribi debeat.

Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ϵ; ſitque S tempus verum inter obſervationem primam ac tertiam; & ſignis + & − probe obſervatis quærantur numeri m & n, ea lege, ut ſit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et ſi, in operatione prima, I deſignet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique ſi in operatione prima, ſecunda ac tertia, quantitates R, r & ϱ deſignent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejuſdem Latera tranſverſa reſpective: erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum Latus rectum, & $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ verum Latus tranſverſum Trajectoriæ quam Cometa deſcribit. Dato autem Latere tranſverſo datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q.E.I.*

Cæterum Cometarum revolventium tempora periodica, & Orbium latera tranſverſa, haud ſatis accurate determinabuntur, niſi per collationem Cometarum inter ſe, qui diverſis temporibus apparent. Si plures Cometæ, poſt æqualia temporum intervalla, eundem Orbem deſcripſiſſe reperiantur, concludendum erit hos omnes eſſe unum & eundem Cometam, in eodem Orbe revolventem. Et tum demum ex revolutionum temporibus, dabuntur Orbium latera tranſverſa, & ex his lateribus determinabuntur Orbes Elliptici.

In

In hunc finem computandæ ſunt igitur Cometarum plurium Trajectoriæ, ex hypotheſi quod ſint Parabolicæ. Nam hujuſmodi Trajectoriæ cum Phænomenis ſemper congruent quamproxime. Id liquet, non tantum ex Trajectoria Parabolica Cometæ anni 1680, quam cum obſervationibus ſupra contuli, ſed etiam ex ea Cometæ illius inſignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* obſervatus fuit. Is ex obſervationibus ſuis longitudines & latitudines hujus Cometæ computavit, ſed minus accurate. Ex iiſdem obſervationibus, *Halleius* noſter loca Cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis ſic inventis Trajectoriam Cometæ determinavit. Invenit autem ejus Nodum aſcendentem in ♊ $21^{gr.}\ 13'.\ 55''$, Inclinationem Orbitæ ad planum Eclipticæ $21^{gr.}\ 18'.\ 40''$, diſtantiam Perihelii a Nodo in Orbita $49^{gr.}\ 27'.\ 30''$. Perihelium in ♌ $8^{gr.}\ 40'.\ 30''$ cum Latitudine auſtrina heliocentrica $16^{gr.}\ 1'.\ 45''$. Cometam in Perihelio *Novemb.* $24^{d}.\ 11^{h}.\ 52'$. P. M. tempore æquato *Londini*, vel $13^{h}.\ 8'$ *Gedani*, ſtylo veteri, & Latus rectum Parabolæ 410286, exiſtente mediocri Terræ a Sole diſtantia 100000. Quam probe loca Cometæ in hoc Orbe computata, congruunt cum obſervationibus, patebit ex Tabula ſequente ab *Halleio* ſupputata.

Temp. Appar. *Gedani*	Obſervata Cometæ diſtantia		Loca obſervata	Loca computata in Orbe
		gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″
Decemb. 3d. 18h. 29½	a Corde Leonis a Spica Virginis	46 · 24 · 20 22 · 52 · 10	Long. ♎ 7. 1. 0 Lat. auſt. 21 · 39. 0	♎ 7 · 1 · 29 21 · 38 · 50
4 . 18. 1½	a Corde Leonis a Spica Virginis	46 · 2 · 45 23 · 52 · 40	Long. ♎ 6.15. 0 Lat. a. 22.24. 0	♎ 6 · 16 · 5 22 · 24 · 0
7 · 17 · 48	a Corde Leonis a Spica Virginis	44 · 48 · 0 27 · 56 · 40	Long. ♎ 3. 6. 0 Lat. a. 25.22. 0	♎ 3 · 7 · 33 25 · 21 · 40
17 · 14 · 43	a Corde Leonis ab Humero Orionis dext.	53 · 15 · 15 45 · 43 · 30	Long. ♌ 2.56. 0 Lat. a. 49 · 25. 0	♌ 2 · 56 · 0 49 · 25 · 0
19 · 9 · 25	a Procyone a Lucid. Mandib. Ceti	35 · 13 · 50 52 · 56 · 0	Long. ♊ 28.40.30 Lat. a. 45 · 48. 0	♊ 28 · 43 · 0 45 · 46 · 0
20 · 9 · 53½	a Procyone a Lucid. Mandib. Ceti	40 · 49 · 0 40 · 4 · 0	Long. ♊ 13 · 3 · 0 Lat. a. 39 · 54. 0	♊ 13 · 5 · 0 39 · 53 · 0
21 · 9 · 9½	ab Hum. dext. Orionis a Lucid. Mandib. Ceti	26 · 21 · 25 29 · 28 · 0	Long. ♊ 2.16. 0 Lat. a. 33 · 41. 0	♊ 2 · 18 · 30 33 · 39 · 40
22 · 9 · 0	ab Hum. dext. Orionis a Lucid. Mandib. Ceti	29 · 47 · 0 20 · 29 · 30	Long. ♉ 24.24. 0 Lat. a. 27 · 45. 0	♉ 24 · 27 · 0 27 · 46 · 0
26 · 7 · 58	a Lucida Arietis ab Aldebaran	23 · 20 · 0 26 · 44 · 0	Long. ♉ 9 · 0. 0 Lat. a. 12.36. 0	♉ 9 · 2 · 28 12 · 34 · 13

Temp.

Temp. Appar. *Gedani*	Obſervata Cometæ diſtantia	Loca obſervata	Loca computata in Orbe.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″
27 . 6 . 45	a Lucida Arietis 20 . 45 . 0 ab Aldebaran 28 . 10 . 0	Long. ♉ 7 . 5 . 40 Lat. a. 10 . 23 . 0	♉ 7 . 8 . 54 10 . 23 . 13
28 . 7 . 39	a Lucida Arietis 18 . 29 . 0 a Palilicio 29 . 37 . 0	Long. ♉ 5 . 24 . 45 Lat. a. 8 . 22 . 50	♉ 5 . 27 . 52 8 . 23 . 37
31 . 6 . 45	a Cing. Androm. 30 . 48 . 10 a Palilicio 32 . 53 . 30	Long. ♉ 2 . 7 . 40 Lat. a. 4 . 13 . 0	♉ 2 . 8 . 20 4 . 16 . 25
Jan. 7 . 7 . 37½	a Cing. Androm. 25 . 11 . 0 a Palilicio 37 . 12 . 25	Long. ♈ 28 . 24 . 47 Lat. bor. 0 . 54 . 0	♈ 28 . 24 . 0 0 . 53 . 0
24 . 7 . 29	a Palilicio 40 . 5 . 0 a Cing. Androm. 20 . 32 . 15	Long. ♈ 26 . 29 . 15 Lat. bor. 5 . 25 . 50	♈ 26 . 28 . 50 5 . 26 . 0
Mar. 1 . 8 . 6	Cometa ab *Hookio* prope ſecundam Arietis obſervabatur, *Mar.* 1ᵈ. 7ʰ. 0′ *Londini*, cum	Long. ♈ 29 . 17 . 20 Lat. bor. 8 . 37 . 10	♈ 29 . 18 . 20 8 . 36 . 12

Apparuit hic Cometa per menſes tres, ſignaque fere ſex deſcripſit, & uno die gradus fere viginti confecit. Curſus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus ſub finem ex retrogrado factus eſt directus. Et non obſtante curſu tam inſolito, Theoria a principio ad finem cum obſervationibus non minus accurate congruit, quam Theoriæ Planetarum cum eorum obſervationibus congruere ſolent, ut inſpicienti Tabulam patebit. Subducenda tamen ſunt minuta duo prima circiter, ubi Cometa velociſſimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta prima ab angulo inter Nodum aſcendentem & Perihelium, ſeu conſtituendo angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriuſque (& hujus & ſuperioris) parallaxis annua inſignis fuit, & inde demonſtratur motus annuus Terræ in Orbe magno.

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in Orbe cujus planum cum plano Eclipticæ angulum fere rectum continebat. Hujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr 23′; Inclinatio Orbitæ ad Eclipticam 83gr. 11′; Perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″; Diſtantia perihelia a Sole 56020, exiſtente radio Orbis magni 100000, & tempore Perihelii *Julii* 2ᵈ. 3ʰ. 50′. Loca autem Cometæ in hoc Orbe ab *Halleio* computata, & cum locis a *Flamſtedio* obſervatis collata, exhibentur in Tabula ſequente.

1683 Temp.

Digitized by Google

1683 Temp. Æquat.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſer.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+ 1. 0	+ 0. 7
15.11.15	2.53.12	11.37.48	29.34. 0	11.39.43	29.34.50	+ 1.55	+ 0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8.40	29.34. 0	+ 1.34	+ 0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+ 1. 3	− 1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	− 0.53	− 1. 7
31. 9.42	18. 9.22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	− 0.39	− 0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+ 0. 1	− 2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	− 0.46	+ 1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	− 1.25	+ 1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	− 1.51	+ 2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	− 2. 2	− 0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	− 4.30	− 5.32
16.15.10	3.48. 2	0.43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	− 1.12	− 0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15	♉ 24.49. 5	5. 9.11	− 3.48	− 2. 4
			Auſtr.		Auſtr.		
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.53	11. 7.12	5.16.50	− 0. 2	− 0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	− 1. 1	− 0.28
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	− 1.31	+ 0.20

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ retrogradi qui apparuit anno 1682. Hujus Nodus aſcendens (computante *Hallejo*) erat in ♉ $21^{gr.}$ 16′. 30″. Inclinatio Orbitæ ad planum Eclipticæ $17^{gr.}$ 56′. 0″. Perihelium in ♒ $2^{gr.}$ 52′. 50″. Diſtantia perihelia a Sole 58328. Et tempus æquatum Perihelii *Sept.* 4^{d}. 7^{h}. 39′. Loca vero ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per Theoriam computatis collata, exhibentur in Tabula ſequente.

1682 Temp. Appar	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	− 0.12	+ 0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+ 0. 1	+ 1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	− 0.47	+ 2.26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	− 0.10	+ 1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+ 0. 5	+ 3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+ 0.43	− 0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+ 3.49	+ 3.11
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+ 1. 2	+ 1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+ 1.22	− 0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	− 0. 1	+ 0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+ 0. 6	+ 0.45

His exemplis abunde ſatis manifeſtum eſt, quod motus Cometarum per Theoriam a nobis expoſitam non minus accurate exhibentur,

Digitized by Google

hibentur, quam ſolent motus Planetarum per eorum Theorias. Et propterea Orbes Cometarum per hanc Theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum Cometæ in quolibet Orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum Orbium Ellipticorum latera tranſverſa & Apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus qui apparuit anno 1607, deſcripſit Orbem cujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′. Inclinatio plani Orbis ad planum Eclipticæ erat 17gr. 2′. Perihelium erat in ♒ 2gr. 16′, & diſtantia perihelia a Sole erat 58680, exiſtente radio Orbis magni 100000. Et Cometa erat in Perihelio *Octob.* 16d. 3h. 50′. Congruit hic Orbis quamproxime cum Orbe Cometæ qui apparuit anno 1682. Si Cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic Cometa ſpatio annorum 75, & axis major Orbis ejus erit ad axem majorem Orbis magni, ut $\sqrt{c}:75\times75$ ad 1, ſeu 1778 ad 100 circiter. Et diſtantia aphelia Cometæ hujus a Sole, erit ad diſtantiam mediocrem Terræ a Sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit Orbem Ellipticum Cometæ hujus determinare. Atque hæc ita ſe habebunt ſi Cometa, ſpatio annorum ſeptuaginta quinque, in hoc Orbe poſthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altius aſcendere.

Cæterum Cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam Apheliorum a Sole diſtantiam, & longam moram in Apheliis, per gravitates in ſe mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non eſt expectandum ut Cometa idem, in eodem Orbe & iiſdem temporibus periodicis, accurate redeat. Sufficit ſi mutationes non majores obvenerint, quam quæ a cauſis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur cur Cometæ non comprehendantur Zodiaco (more Planetarum) ſed inde migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in Apheliis ſuis ubi tardiſſime moventur, quam longiſſime diſtent ab invicem & ſe mutuo quam minime trahant. Qua de cauſa Cometæ qui altius deſcendunt, adeoque tardiſſime moventur in Apheliis, debent altius aſcendere.

Cometa qui anno 1680 apparuit, minus diſtabat a Sole in Perihelio ſuo quam parte ſexta diametri Solis; & propter ſummam velocitatem in vicinia illa, & denſitatem aliquam Atmoſphæræ Solis, reſiſtentiam nonnullam ſentire debuit, & aliquantulum retardari,

dari & propius ad Solem accedere: & ſingulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed & in Aphelio ubi tardiſſime movetur, aliquando per attractionem aliorum Cometarum retardari poteſt & ſubinde in Solem incidere. Sic etiam Stellæ fixæ quæ paulatim expirant in lucem & vapores, Cometis in ipſas incidentibus refici poſſunt, & novo alimento accenſæ pro Stellis Novis haberi. Vapores autem qui ex Sole & Stellis fixis & caudis Cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in Atmoſphæras Planetarum, & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos, & ſubinde per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare. Decreſcente autem corpore Solis motus medii Planetarum circum Solem paulatim tardeſcent, & creſcente Terra motus medius Lunæ circum Terram paulatim augebitur. Et collatis quidem obſervationibus Eclipſium *Babylonicis* cum iis *Albategnii* & cum hodiernis, *Halleius* noſter motum medium Lunæ cum motu diurno Terræ collatum, paulatim accelerari, primus omnium quod ſciam deprehendit.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypotheſis Vorticum multis premitur difficultatibus. Ut Planeta unuſquiſque radio ad Solem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in duplicata ratione diſtantiarum a Sole. Ut periodica Planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicata diſtantiarum a Sole, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in eadem diſtantiarum proportione. Ut Vortices minores circum Saturnum, Jovem & alios Planetas gyrati conſerventur & tranquille natent in Vortice Solis, tempora periodica partium Vorticis Solaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones Solis & Planetarum circum axes ſuos ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus Cometarum ſunt ſumme regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant, & per Vortices explicari nequeunt. Feruntur Cometæ motibus valde eccentricis in omnes cælorum partes, quod fieri non poteſt niſi Vortices tollantur.

Projectilia, in aere noſtro, ſolam aeris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato aere, ut fit in Vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat, ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc

Digitized by Google

DE MUNDI SYSTEMATE

Vacuo cadunt. Et par eſt ratio ſpatiorum cæleſtium quæ ſunt ſupra atmoſphæram Terræ. Corpora omnia in iſtis ſpatiis liberrime moveri debent; & propterea Planetæ & Cometæ in orbibus ſpecie & poſitione datis, ſecundum leges ſupra expoſitas, perpetuo revolvi. Perſeverabunt quidem in orbibus ſuis per leges gravitatis, ſed regularem orbium ſitum primitus acquirere per leges haſce minime potuerunt.

Planetæ ſex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eadem motus directione, in eodem plano quamproxime. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem & Saturnum in circulis concentricis, eadem motus directione, in planis orbium Planetarum quamproxime. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex cauſis Mechanicis; ſiquidem Cometæ in Orbibus valde eccentricis, & in omnes cælorum partes libere feruntur. Quo motus genere Cometæ per Orbes Planetarum celerrime & facillime tranſeunt, & in Apheliis ſuis ubi tardiores ſunt & diutius morantur, quam longiſſime diſtant ab invicem, & ſe mutuo quam minime trahunt. Elegantiſſima hæcce Solis, Planetarum & Cometarum compages non niſi conſilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et ſi Stellæ fixæ ſint centra ſimilium ſyſtematum; hæc omnia ſimili conſilio conſtructa, ſuberunt *Unius* dominio: præſertim cum lux Fixarum ſit ejuſdem naturæ ac lux Solis, & ſyſtemata omnia lucem in omnia invicem immittant.

Hic omnia regit, non ut Anima mundi, ſed ut univerſorum Dominus; & propter dominium ſuum Dominus Deus * παντοκράτωρ dici ſolet. Nam *Deus* eſt vox relativa & ad ſervos refertur: & *Deitas* eſt dominatio Dei non in corpus proprium, ſed in ſervos. *Deus ſummus* eſt Ens æternum, infinitum, abſolute perfectum; ſed Ens utcunque perfectum ſine dominio, non eſt *Dominus Deus*. Dicimus enim *Deus meus*, *Deus veſter*, *Deus Iſraelis:* ſed non dicimus *Æternus meus*, *Æternus veſter*, *Æternus Iſraelis*; non dicimus *Infinitus meus*, *Infinitus veſter*, *Infinitus Iſraelis*; non dicimus *Perfectus meus*, *Perfectus veſter*, *Perfectus Iſraelis*. Hæ appellationes relationem non habent ad ſervos. Vox *Deus* paſſim ſignificat *Dominum*, ſed omnis Dominus non eſt Deus. Dominatio Entis ſpiritualis *Deum* conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione vera ſequitur, Deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe vel ſumme perfectum.

* Id eſt, *Imperator univerſalis.*

Digitized by Google

fectum. *Æternus* eſt & *Infinitus*, *Omnipotens* & *Omniſciens*, id eſt, durat ab æterno in æternum & adeſt ab infinito in infinitum, omnia regit & omnia cognoſcit quæ fiunt aut ſciri poſſunt. Non eſt æternitas vel infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio vel ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper & adeſt ubique, & exiſtendo ſemper & ubique durationem & ſpatium, æternitatem & infinitatem conſtituit. Cum unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*; certe rerum omnium Fabricator ac Dominus non erit *nunquam nuſquam*. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantia ſubſiſtere non poteſt. In ipſo * continentur & moventur univerſa, ſed abſque mutua *paſſione*. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentia Dei. Deum ſummum neceſſario exiſtere in confeſſo eſt: Et eadem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi & agendi; ſed more minime humano, more minime corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus ideam non habet colorum, ſic nos ideam non habemus modorum quibus Deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figura corporea prorſus deſtituitur, ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporei coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus Subſtantia minime cognoſcimus. Videmus tantum corporum figuras & colores, audimus tantum ſonos, tangimus tantum ſuperficies externas, olfacimus odores ſolos, & guſtamus ſapores; Intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nulla actione reflexa cognoſcimus, & multo minus ideam habemus ſubſtantiæ Dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ſuas & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras, & cauſas finales; veneramur autem & colimus ob dominium. Deus enim ſine dominio, providentia, & cauſis finalibus, nihil aliud eſt quam Fatum & Natura. Et hæc de Deo; de quo utique ex Phænomenis diſſerere, ad *Philoſophiam Experimentalem* pertinet.

* Ita ſentiebant veteres, *Aratus* in Phænom: ſub initio. *Paulus* in Act. 7. 27, 28. *Moſes* Deut. 4. 39 & 10. 14. *David* Pſal. 139 7, 8. *Solomon* Reg. 8. 27. *Job.* 22, 12. *Jeremias* Propheta 23. 23, 24.

Hactenus Phænomena cælorum & maris noſtri per Vim gravitatis expoſui, ſed cauſam Gravitatis nondum aſſignavi. Oritur utique hæc Vis a cauſa aliqua quæ penetrat ad uſque centra Solis

Digitized by Google

& Planetarum, ſine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *ſuperficierum* particularum in quas agit (ut ſolent cauſæ Mechanicæ,) ſed pro quantitate materiæ *ſolidæ*; & cujus actio in immenſas diſtantias undique extenditur, decreſcendo ſemper in duplicata ratione diſtantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in ſingulas Solis particulas, & recedendo a Sole decreſcit accurate in duplicata ratione diſtantiarum ad uſque orbem Saturni, ut ex quiete Apheliorum Planetarum manifeſtum eſt, & ad uſque ultima Cometarum Aphelia, ſi modo Aphelia illa quieſcant. Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & Hypotheſes non fingo. Quicquid enim ex Phænomenis non deducitur, *Hypotheſis* vocanda eſt; & Hypotheſes ſeu Metaphyſicæ, ſeu Phyſicæ, ſeu Qualitatum occultarum, ſeu Mechanicæ, in *Philoſophia Experimentali* locum non habent. In hac Philoſophia Propoſitiones deducuntur ex Phænomenis, & redduntur generales per Inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et ſatis eſt quod Gravitas revera exiſtat, & agat ſecundum leges a nobis expoſitas, & ad corporum cæleſtium & maris noſtri motus omnes ſufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam ſubtiliſſimo corpora craſſa pervadente, & in iiſdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas diſtantias ſe mutuo attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora Electrica agunt ad diſtantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuſcula vicina; & Lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & Senſatio omnis excitatur, & membra Animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus Spiritus per ſolida nervorum capillamenta ab externis ſenſuum organis ad cerebrum & a cerebro in muſculos propagatis. Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia Experimentorum, quibus leges actionum hujus Spiritus accurate determinari & monſtrari debent.

F I N I S.

Pag. 478, *lin.* 25, *lege:* duodecim minuta ſecunda.

Digitized by Google

INDEX RERUM
ALPHABETICUS.

N. B. *Citationes facta ſunt ad normam ſequentis Exempli.* III, 10: 444, 20: 471, 28 *deſignant Libri tertii Propoſitionem decimam: Paginæ* 444^{tæ} *lineam* 20^{am}: *Paginæ* 471^{mæ} *lineam* 28^{am}.

A.

Æquinoctiorum præceſſio
causæ hujus motus indicantur III, 21
quantitas motus ex cauſis computatur III, 39
Aeris
denſitas ad quamlibet altitudinem colligitur ex Prop. 22. Lib. II. quanta ſit ad altitudinem unius ſemidiametri Terreſtris oſtenditur 470, 11
elaſtica vis quali cauſæ tribui poſſit II, 23
gravitas cum Aquæ gravitate collata 470, 3
reſiſtentia quanta ſit, per Experimenta Pendulorum colligitur 286, 28; per Experimenta corporum cadentium & Theoriam accuratius invenitur 327, 13
Anguli contactus non ſunt omnes ejuſdem generis, ſed alii aliis infinite minores p. 32
Apſidum motus expenditur I, Sect. 9
Areæ quas corpora in gyros acta, radiis ad centrum virium ductis, deſcribunt, conferuntur cum temporibus deſcriptionum I, 1, 2, 3, 58, 65
Attractio corporum univerſorum demonſtratur III, 7; qualis ſit hujus demonſtrationis certitudo oſtenditur 358, 28: 484, 11
Attractionis cauſam vel modum nullibi definit Author 5, 17: 147, 32: 172, 31: 483, 34.

C.

Cæli
reſiſtentia deſtituuntur III, 10: 444, 20: 471, 28; & propterea Fluido omni corporeo 328, 18
tranſitum Luci præbent abſque ulla refractione 467, 33
Calore virga ferrea comperta eſt augeri longitudine 386, 4
Calor Solis quantus ſit in diverſis a Sole diſtantiis 466, 20
quantus apud Mercurium 372, 12
quantus apud Cometam anni 1680 in Perihelio verſantem 466, 22
Centrum commune gravitatis corporum plurium, ab actionibus corporum inter ſe, non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis p. 17
Centrum commune gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quieſcere III, 11; confirmatur ex Cor. 2. Prop. 14. Lib. III.
Centrum commune gravitatis Terræ & Lunæ motu annuo percurrit Orbem magnum 376, 6
quibus intervallis diſtat a Terra & Luna 430, 22
Centrum Virium quibus corpora revolventia in Orbibus retinentur.
quali Arearum indicio invenitur 38, 14
qua ratione ex datis revolventium velocitatibus invenitur I, 5
Circuli circumferentia, qua lege vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum deſcribi poteſt a corpore revolvente I, 4, 7, 8
Cometæ
Genus ſunt Planetarum, non Meteororum 444, 24: 466, 15
Luna ſuperiores ſunt, & in regione Planetarum verſantur p. 439
Diſtantia eorum qua ratione per Obſervationes colligi poteſt quamproxime 439, 21
Plures obſervati ſunt in hemiſphærio Solem verſus, quam in hemiſphærio oppoſito; & unde hoc fiat 444, 5
Splendent luce Solis a ſe reflexa 444, 4; Lux illa quanta eſſe ſolet 441, 12
Cinguntur Atmoſphæris ingentibus 442, 121 444, 27
Qui ad Solem propius accedunt ut plurimum minores eſſe exiſtimantur 475, 7
Quo fine non comprehenduntur Zodiaco (more Planetarum) ſed in omnes cælorum regiones varie feruntur 480, 30
Poſſunt aliquando in Solem incidere & novum illi alimentum ignis præbere 480, 37
Uſus eorum ſuggeritur 473, 1: 481, 7

Come-

Digitized by Google

Cometarum caudæ
avertuntur a Sole 468, 39
maximæ ſunt & fulgentiſſimæ ſtatim poſt tranſitum per viciniam Solis 467, 8
inſignis earum raritas 470, 32
origo & natura earundem 442, 19: 467, 13
quo temporis ſpatio a capite aſcendunt 471, 1
Cometæ
Moventur in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus, & radiis ad Solem ductis deſcribunt areas temporibus proportionales. Et quidem in Ellipſibus moventur ſi in Orbem redeunt, hæ tamen Parabolis erunt maxime finitimæ III, 40
Trajectoria Parabolica ex datis tribus Obſervationibus invenitur III, 41; Inventa corrigitur III, 42
Locus in Parabola invenitur ad tempus datum 445, 30: I, 30
Velocitas cum velocitate Planetarum confertur 445, 17
Cometa annorum 1664 & 1665
Hujus motus obſervatus expenditur, & cum Theoria accurate congruere deprehenditur p. 477
Cometa annorum 1680 & 1681
Hujus motus obſervatus cum Theoria accurate congruere invenitur p. 455 & ſeqq.
Videbatur in Ellipſi revolvi ſpatio annorum pluſquam quingentorum 464, 37
Trajectoria illius & Cauda ſingulis in locis delineantur p. 465
Cometa anni 1682
Hujus motus accurate reſpondet Theoriæ p. 479
Comparuiſſe viſus eſt anno 1607, iterumque rediturus videtur periodo 75 annorum 480, 6
Cometa anni 1683
Hujus motus accurate reſpondet Theoriæ p. 478
Curvæ diſtinguuntur in Geometrice rationales & Geometrice irrationales 100, 5
Curvatura figurarum qua ratione æſtimanda ſit 235, 28: 298, 33
Cycloidis ſeu Epicycloidis
rectificatio I, 48, 49: 142, 18
Evoluta I, 50: 142, 22
Cylindri attractio ex particulis trahentibus compoſiti quarum vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum 198, 1

D.

Dei Natura p. 482 & 483
Deſcenſus gravium in vacuo quantus ſit, ex longitudine Penduli colligitur 379, 1
Deſcenſus vel Aſcenſus rectilinei ſpatia deſcripta, tempora deſcriptionum & velocitates acquiſitæ conferuntur, poſita cujuſcunque generis vi centripeta I, Sect. 7
Deſcenſus & Aſcenſus corporum in Mediis reſiſtentibus II, 3, 8, 9, 40, 13, 14

E.

Ellipſis
qua lege vis centripetæ tendentis ad centrum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 10, 64
qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 11

F.

Fluidi definitio p. 260
Fluidorum denſitas & compreſſio quas leges habent, oſtenditur II, Sect. 5
Fluidorum per foramen in vaſe factum effluentium determinatur motus II, 36
Fumi in camino aſcenſus obiter explicatur 472, 4

G.

Graduum in Meridiano Terreſtri menſura exhibetur, & quam ſit exigua inæqualitas oſtenditur ex Theoria III, 20
Gravitas
diverſi eſt generis a vi Magnetica 368, 19
mutua eſt inter Terram & ejus partes 22, 18
ejus cauſa non aſſignatur 483, 34
datur in Planetas univerſos 365, 15; & pergendo a ſuperficiebus Planetarum ſurſum decreſcit in duplicata ratione diſtantiarum a centro III, 8, deorſum decreſcit in ſimplici ratione quamproxime III, 9
datur in corpora omnia, & proportionalis eſt quantitati materiæ in ſingulis III, 7
Gravitatem eſſe vim illam qua Luna retinetur in Orbe III, 4, computo accuratiori comprobatur 430, 25
Gravitatem eſſe vim illam qua Planetæ primarii & Satellites Jovis & Saturni retinentur in Orbibus III, 5

H.

Hydroſtaticæ principia traduntur II, Sect. 5
Hyperbola
qua lege vis centrifugæ tendentis a figuræ centro deſcribitur a corpore revolvente 47, 26
qua lege vis centrifugæ tendentis ab umbilico figuræ deſcribitur a corpore revolvente 55, 6
qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 12
Hypotheſes cujuſcunque generis rejiciuntur ab hac Philoſophia 484, 8.

I. Iner-

I.

Inertiæ vis definitur p. 2
Jovis
- diſtantia a Sole 361, 1
- ſemidiameter apparens 371, 3
- ſemidiameter vera 371, 14
- attractiva vis quanta ſit 370, 33
- pondus corporum in ejus ſuperficie 371, 19
- denſitas 371, 37
- quantitas materiæ 371, 27
- perturbatio a Saturno quanta ſit 375, 33
- diametrorum proportio computo exhibetur 381, 27
- converſio circum axem quo tempore abſolvitur 381, 25
- cingulæ cauſa ſubindicatur 444, 32.

L.

Locus definitur, & diſtinguitur in abſolutum & relativum 6, 12
Loca corporum in Sectionibus conicis motorum inveniuntur ad tempus aſſignatum I, Sect. 6
Lucis
- propagatio non eſt inſtantanea 207, 5; non ſit per agitationem Medii alicujus Ætherei 342, 36
- velocitas in diverſis Mediis diverſa I, 95
- reflexio quædam explicatur I, 96
- refractio explicatur I, 94; non fit in puncto ſolum incidentiæ 207, 29
- incurvatio prope corporum terminos Experimentis obſervata 207, 8

Lunæ
- corporis figura computo colligitur III, 38
- inde cauſa patefacta, cur eandem ſemper faciem in Terram obvertat 432, 9
- & librationes explicantur III, 17
- diameter mediocris apparens 430, 12
- diameter vera 430, 17
- pondus corporum in ejus ſuperficie 430, 20
- denſitas 430, 15
- quantitas materiæ 430, 19
- diſtantia mediocris a Terra quot continet maximas Terræ ſemidiametros 430, 25, quot mediocres 431, 18
- parallaxis maxima in longitudinem paulo major eſt quam parallaxis maxima in latitudinem 387, 8
- vis ad Mare movendum quanta ſit III, 37; non ſentiri poteſt in Experimentis pendulorum, vel in Staticis aut Hydroſtaticis quibuſcunque 430, 1
- tempus periodicum 430, 32
- tempus revolutionis ſynodicæ 398, 1
- motus medius cum diurno motu Terræ collatus paulatim accelerari deprehenditur ab *Halleio* 481, 16

Lunæ motus & motuum inæqualitates a cauſis ſuis derivantur III, 22: p. 421 & ſeqq.
- tardius revolvitur Luna dilatato Orbe, in perihelio Terræ; citius in aphelio, contracto Orbe III, 22: 421, 6
- tardius revolvitur, dilatato Orbe, in Apogæi Syzygiis cum Sole; citius in Quadraturis Apogæi, contracto Orbe 422, 1
- tardius revolvitur, dilatato Orbe, in Syzygiis Nodi cum Sole; citius in Quadraturis Nodi, contracto Orbe 422, 21
- tardius movetur in Quadraturis ſuis cum Sole, citius in Syzygiis; & radio ad Terram ducto deſcribit aream pro tempore minorem in priore caſu, majorem in poſteriore III, 22: Inæqualitas harum Arearum computatur III, 26. Orbem inſuper habet magis curvum & longius a Terra recedit in priore caſu, minus curvum habet Orbem & propius ad Terram accedit in poſteriore III, 22. Orbis hujus figura & proportio diametrorum ejus computo colligitur III, 28. Et ſubinde proponitur methodus inveniendi diſtantiam Lunæ a Terra ex motu ejus horario III, 27
- Apogæum tardius movetur in Aphelio Terræ, velocius in Perihelio III, 22: 421, 21
- Apogæum ubi eſt in Solis Syzygiis, maxime progreditur; in Quadraturis regreditur III, 22: 422, 37
- Eccentricitas maxima eſt in Apogæi Syzygiis cum Sole, minima in Quadraturis III, 22: 422, 39
- Nodi tardius moventur in Aphelio Terræ, velocius in Perihelio III, 22: 421, 21
- Nodi quieſcunt in Syzygiis ſuis cum Sole, & velociſſime regrediuntur in Quadraturis III, 22. Nodorum motus & inæqualitates motuum computantur ex Theoria Gravitatis III, 30, 31, 32, 33
- Inclinatio Orbis ad Eclipticam maxima eſt in Syzygiis Nodorum cum Sole, minima in Quadraturis I, 66 Cor. 10. Inclinationis variationes computantur ex Theoria Gravitatis III, 34, 35

Lunarium motuum Æquationes ad uſus Aſtronomicos p. 421 & ſeqq.
- Motus medii Lunæ
  - Æquatio annua 421, 4
  - Æquatio ſemeſtris prima 422, 1
  - Æquatio ſemeſtris ſecunda 422, 21
  - Æquatio centri prima 423, 20: p. 101 & ſeqq.
  - Æquatio centri ſecunda 423, 15
  - Variatio prima III, 29
  - Variatio ſecunda 425, 5

Motus

Digitized by Google

Motus medii Apogæi
Æquatio annua 421, 21
Æquatio ſemeſtris 422, 37
Eccentricitatis
Æquatio ſemeſtris 422, 37
Motus medii Nodorum
Æquatio annua 421, 21
Æquatio ſemeſtris III. 33
Inclinationis Orbitæ ad Eclipticam
Æquatio ſemeſtris 420, 22
Lunarium motuum Theoria, qua Methodo ſtabilienda ſit per Obſervationes 425, 33.

M.

Magnetica vis 22, 13 : 271, 25 : 368, 29: 431, 23
Maris æſtus a cauſis ſuis derivatur III, 24, 36, 37
Martis
diſtantia a Sole 361, 1
Aphelii motus 376, 33
Materiæ
quantitas definitur p. 1
vis inſita ſeu vis inertiæ definitur p. 2
vis impreſſa definitur p. 2
extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas, vis inertiæ, gravitas, qua ratione innoteſcunt 357, 16: 484, 10
diviſibilitas nondum conſtat 358, 18
Materia ſubtilis *Carteſianorum* ad examen quodam revocatur 292, 12
Materia vel ſubtiliſſima Gravitate non deſtituitur 368, 1
Mechanicæ, quæ dicuntur, Potentiæ explicantur & demonſtrantur p. 14 & 15: p. 23
Mercurii
diſtantia a Sole 361, 1
Aphelii motus 376, 33
Methodus
Rationum primarum & ultimarum I, Sect. 1
Tranſmutandi figuras in alias quæ ſunt ejuſdem Ordinis Analytici I, Lem. 22. pag. 79
Fluxionum II, Lem. 2. p. 224
Differentialis III, Lemm. 5 & 6. pagg. 446 & 447
Inveniendi Curvarum omnium quadraturas proxime veras 447, 8
Serierum convergentium adhibetur ad ſolutionem Problematum difficiliorum p. 127: 128: 202: 235: 414
Motus quantitas definitur p. 1
Motus abſolutus & relativus p. 6: 7: 8: 9 ab invicem ſecerni poſſunt, exemplo demonſtratur p. 10
Motus Leges p. 12 & ſeqq.
Motuum compoſitio & reſolutio p. 14
Motus corporum congredientium poſt reflexionem, quali Experimento recte colligi poſſunt, oſtenditur 19, 21
Motus corporum
in Conicis ſectionibus eccentricis I, Sect. 3
in Orbibus mobilibus I, Sect. 9
in Superficiebus datis & Funependulorum motus reciprocus I, Sect. 10
Motus corporum viribus centripetis ſe mutuo petentium I, Sect. 11
Motus corporum Minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas Magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur I, Sect. 14
Motus corporum quibus reſiſtitur
in ratione velocitatis II, Sect. 1
in duplicata ratione velocitatis II, Sect. 2
partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata II, Sect. 3
Motus
corporum ſola vi inſita progredientium in Mediis reſiſtentibus II, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12: 302, 5
corporum recta aſcendentium vel deſcendentium in Mediis reſiſtentibus, agente vi Gravitatis uniformi II, 3, 8, 9, 40, 13, 14
corporum projectorum in Mediis reſiſtentibus, agente vi Gravitatis uniformi II, 4, 10
corporum circumgyrantium in Mediis reſiſtentibus II, Sect. 4
corporum Funependulorum in Mediis reſiſtentibus II, Sect. 6
Motus & reſiſtentia Fluidorum II, Sect. 7
Motus per Fluida propagatus II, Sect. 8
Motus circularis ſeu Vorticoſus Fluidorum II, Sect. 9
Mundus originem non habet ex cauſis Mechanicis p. 482, 12.

N.

Navium conſtructioni Propoſitio non inutilis 300, 4.

O.

Opticarum ovalium inventio quam *Carteſius* celaverat I, 97. *Carteſiani* Problematis generalior ſolutio I, 98
Orbitarum inventio
quas corpora deſcribunt, de loco dato data cum velocitate, ſecundum datum rectam egreſſa; ubi vis centripeta eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ & vis illius quantitas abſoluta cognoſcitur I, 17
quas corpora deſcribunt ubi vires centripetæ ſunt reciproce ut cubi diſtantiarum 45, 18: 118, 27: 125, 25
quas corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata deſcribunt I, Sect. 8.

P. Para-

Digitized by Google

P.

Parabola, qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ, deſcribitur a corpore revolvente I, 13
Pendulorum affectiones explicantur I, 50, 51, 52, 53: II, Sect. 6.
Pendulorum iſochronorum longitudines diverſæ in diverſis locorum Latitudinibus inter ſe conferuntur, tum per Obſervationes, tum per Theoriam Gravitatis III, 20
Philoſophandi Regulæ p. 357
Planetæ
non deferuntur a Vorticibus corporeis 352, 37: 354, 25: 481, 21
Primarii
Solem cingunt 360, 7
moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Solis III, 13
radiis ad Solem ductis deſcribunt areas temporibus proportionales 361, 15: III, 13
temporibus periodicis revolvuntur quæ ſunt in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum a Sole 360, 17: III, 13 & I, 15
retinentur in Orbibus ſuis a vi Gravitatis quæ reſpicit Solem, & eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ab ipſius centro III, 2, 5
Secundarii
moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Primariorum III, 22
radiis ad Primarios ſuos ductis deſcribunt areas temporibus proportionales 359, 3, 22: 361, 27: III, 22
temporibus periodicis revolvuntur quæ ſunt in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum a Primariis ſuis 359, 3, 22: III, 22 & I, 15
retinentur in Orbibus ſuis a vi Gravitatis quæ reſpicit Primarios, & eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ab eorum centris III, 1, 3, 4, 5
Planetarum
diſtantiæ a Sole 361, 1
Orbium Aphelia & Nodi prope quieſcunt III, 14
Orbes determinantur III, 15, 16
loca in Orbibus inveniuntur I, 31
denſitas calori quem a Sole recipiunt, accommodatur 372, 7
converſiones diurnæ ſunt æquabiles III, 17
axes ſunt minores diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur III, 18
Pondera corporum
in Terram vel Solem vel Planetam quemvis, paribus diſtantiis ab eorum centris, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus III, 6
non pendent ab eorum formis & texturis 367, 35
in diverſis Terræ regionibus inveniuntur & inter ſe comparantur III, 20
Problematis
Kepleriani ſolutio per Trochoidem & per Approximationes I, 31
Veterum de quatuor lineis, a *Pappo* memorati, a *Carteſio* par calculum Analyticum tentati, compoſitio Geometrica 70, 19
Projectilia, ſepoſita Medii reſiſtentia, moveri in Parabola colligitur 47, 23: 202, 23: 236, 29
Projectilium motus in Mediis reſiſtentibus II, 4, 10
Pulſuum Aeris, quibus Soni propagantur, determinantur intervalla ſeu latitudines II, 50: 344, 18. Hæc intervalla in apertarum Fiſtularum ſonis æquari duplis longitudinibus Fiſtularum veroſimile eſt 344, 26

Q.

Quadratura generalis Ovalium dari non poteſt per finitos terminos I, Lem, 28. p. 98
Qualitates corporum qua ratione innoteſcunt & admittuntur 357, 16
Quies vera & relativa p. 6, 7, 8, 9.

R.

Reſiſtentiæ quantitas
in Mediis non continuis II, 35
in Mediis continuis II, 38
in Mediis cujuſcunque generis 302, 32
Reſiſtentiarum Theoria confirmatur
per Experimenta Pendulorum II, 30, 31, Sch. Gen. p, 284
per Experimenta corporum cadentium II, 40, Sch. p. 319
Reſiſtentia Mediorum
eſt ut eorundem denſitas, cæteris paribus 290, 29: 291, 35: II, 33, 35, 38: 327, 14
eſt in duplicata ratione velocitatis corporum quibus reſiſtitur, cæteris paribus 219, 24: 284, 33; II, 33, 35, 38: 324, 23
eſt in duplicata ratione diametri corporum Sphæricorum quibus reſiſtitur, cæteris paribus 288, 4: 289, 11: II, 33, 35, 38: Sch. p. 319
non minuitur ab actione Fluidi in partes poſticas corporis moti 312, 23
Reſiſtentia Fluidorum duplex eſt; oriturque vel ab Inertia materiæ fluidæ, vel ab Elaſticitate, Tenacitate & Frictione partium ejus 318, 1. Reſiſtentia quæ ſentitur in Fluidis fere tota eſt prioris generis 326, 32, & minui non poteſt per ſubtilitatem partium Fluidi, manente denſitate 328, 7
Reſiſtentiæ Globi ad reſiſtentiam Cylindri proportio, in Mediis non continuis II, 34

Digitized by Google

Reſiſtentia quam patitur a Fluido fruſtum Conicum, qua ratione fiat minima 299, 30
Reſiſtentiæ minimæ Solidum 300, 15.

S.

Satellitis
Jovialis extimi elongatio maxima heliocentrica a centro Jovis 370, 35
Hugeniani elongatio maxima heliocentrica a centro Saturni 371, 5
Satellitum
Jovialium tempora periodica & diſtantiæ a centro Jovis 359, 12
Saturniorum tempora periodica & diſtantiæ a centro Saturni 360, 1
Jovialium & Saturniorum inæquales motus a motibus Lunæ derivari poſſe oſtenditur III, 23
Saturni
diſtantia a Sole 361, 1
ſemidiameter apparens 371, 9
ſemidiameter vera 371, 14
vis attractiva quanta ſit 370, 33
pondus corporum in ejus ſuperficie 371, 19
denſitas 371, 37
quaotitas materiæ 371, 27
perturbatio a Jove quanta ſit 375, 16
diameter apparens Annuli quo cingitur 371, 8
Sectiones Conicæ, qua lege vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum, deſcribuntur a corporibus revolventibus 58, 20
Sectionum Conicarum deſcriptio Geometrica
ubi dantur Umbilici I, Sect. 4
ubi non dantur Umbilici I, Sect. 5. ubi dantur Centra vel Aſymptoti 87, 9
Seſquiplicata ratio definitur 31, 40
Sol
circum Planetarum omnium commune gravitatis centrum movetur III, 12
ſemidiameter ejus mediocris apparens 371, 12
ſemidiameter vera 371, 14
parallaxis ejus horizontalis 370, 33
parallaxis menſtrua 376, 4
vis ejus attractiva quanta ſit 370, 33
pondus corporum in ejus ſuperficie 371, 19
denſitas ejus 371, 37
quantitas materiæ 371, 27
vis ejus ad perturbandos motus Lunæ 363, 15: III, 25
vis ad Mare movendum III, 36
Sonorum
natura explicatur II, 43, 47, 48, 49, 50
propagatio divergit a recto tramite 332, 9, fit per agitationem Aeris 343, 1
velocitas computo colligitur 343, 8, paululum major eſſe debet Æſtivo quam Hyberno tempore, per Theoriam 344, 11
ceſſatio fit ſtatim ubi ceſſat motus corporis ſonori 344, 29
augmentatio per tubos ſtentorophonicos 344, 32
Spatium
abſolutum & relativum p. 6, 7
non eſt æqualiter plenum 368, 16
Sphæroidis attractio, cujus particularum vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum 198, 21
Spiralis quæ ſecat radios ſuos omnes in angulo dato, qua lege vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis deſcribi poteſt a corpore revolvente, oſtenditur I, 9: II, 15, 16
Spiritum quendam corpora pervadentem & in corporibus latentem, ad plurima naturæ phænomena ſolvenda, requiri ſuggeritur 484, 17
Stellarum fixarum
quies demonſtratur 376, 18
radiatio & ſcintillatio quibus cauſis referendæ ſint 467, 38
Stellæ Novæ unde oriri poſſint 481, 5
Subſtantiæ rerum omnium occultæ ſunt 483, 22

T.

Tempus abſolutum & relativum p. 5, 7
Temporis Æquatio Aſtronomica per Horologium oſcillatorium & Eclipſes Satellitum Jovis comprobatur 7, 15
Tempora periodica corporum revolventium in Ellipſibus, ubi vires centripetæ ad umbilicum tendunt I, 15
Terræ
dimenſio per *Picartum* 378, 11, per *Caſſinum* 378, 21, per *Norwoodum* 378, 28
figura invenitur, & proportio diametrorum, & menſura graduum in Meridiano III, 19, 20
altitudinis ad Æquatorem ſupra altitudinem ad Polos quantus ſit exceſſus 381, 7: 387, 1
ſemidiameter maxima, minima & mediocris 387, 10
globus denſior eſt quam ſi totus ex Aqua conſtaret 372, 31
globus denſior eſt ad centrum quam ad ſuperficiem 386, 1
molem indies augeri veroſimile eſt 473, 18: 481, 13
axis nutatio III, 21
motus annuus in Orbe magno demonſtratur III, 12, 13: 478, 26
Eccentricitas quanta ſit 421, 15
Aphelii motus quantus ſit 376, 33.

V.

Vacuum datur, vel ſpatia omnia (ſi dicantur eſſe plena) non ſunt æqualiter plena 328, 18: 368, 25

Veloci-

Digitized by Google

Velocitas maxima quam Globus, in Medio reſiſtente cadendo, poteſt acquirere II, 38, Cor. 2
Velocitates corporum in Sectionibus conicis motorum, ubi vires centripetæ ad umbilicum tendunt I, 16
Veneris
diſtantia a Sole 361, 1
tempus periodicum 370, 23
Aphelii motus 376, 33
Virium compoſitio & reſolutio p. 14
Vires attractivæ corporum
ſphæricorum ex particulis quacunque lege trahentibus compoſitorum, expenduntur I, Sect. 12
non ſphæricorum ex particulis quacunque lege trahentibus compoſitorum, expenduntur I, Sect. 13
Vis centrifuga corporum in Æquatore Terræ quanta ſit 379, 22
Vis centripeta definitur p. 2
quantitas ejus abſoluta definitur p. 4
quantitas acceleratrix definitur p. 4
quantitas motrix definitur p. 4
proportio ejus ad vim quamlibet notam, qua ratione colligenda ſit, oſtenditur 40, 1
Virium centripetarum inventio, ubi corpus in ſpatio non reſiſtente, circa centrum immobile, in Orbe quocunque revolvitur I, 6: I, Sect. 2 & 3
Viribus centripetis datis ad quodcunque punctum tendentibus, quibus Figura quævis a corpore revolvente deſcribi poteſt; dantur vires centripetæ ad aliud quodvis punctum tendentes, quibus eadem Figura eodem tempore periodico deſcribi poteſt 44, 3
Viribus centripetis datis quibus Figura quævis deſcribitur a corpore revolvente; dantur vires quibus Figura nova deſcribi poteſt, ſi Ordinatæ augeantur vel minuantur in ratione quacunque data, vel angulus Ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico 47, 28
Viribus centripetis in duplicata ratione diſtantiarum decreſcentibus, quænam Figuræ deſcribi poſſunt, oſtenditur 53, 1: 150, 8
Vi centripeta
quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ tendentis ad centrum virium maxime longinquum, corpus movebitur in data quavis coni ſectione 45, 1
quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ tendentis ad centrum virium maxime longinquum, corpus movebitur in Hyperbola 202, 26
Umbra Terreſtris in Eclipſibus Lunæ augenda eſt, propter Atmoſphæræ refractionem 425, 27
Umbræ Terreſtris diametri non ſunt æquales; quanta ſit differentia oſtenditur 387, 8
Undarum in aquæ ſtagnantis ſuperficie propagatarum velocitas invenitur II, 46
Vorticum natura & conſtitutio ad examen revocatur II, Sect. 9: 481, 21
Ut. Hujus voculæ ſignificatio Mathematica definitur 30, 19.

F I N I S.

Digitized by Google

CORRIGENDA.

P*AG.* 3, *lin.* 14 *lege*, Quo minor erit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major &c. *P.* 7, *l.* 8 *lege*, ut ex veriore tempore menſurent motus &c. *P.* 15, *l.* 16 *lege*, lineam pH in plana, &c. *P.* 17, *l.* 20 *lege*, centri corporis tertii &c. *P.* 41, *l.* 3 *lege*, ſunt reciproce ut velocitates corporis in punctis P & Q; &c. *P.* 44, *l.* 23 *lege*, rectangulo $QR \times \overline{RN + QN}$ &c. *P.* 47. *l. penult. lege*, in Abſciſſa poſitum tendentes a binis quibuſvis figurarum locis, ad quæ terminantur Ordinatæ correſpondentibus Abſciſſarum punctis inſiſtentes, augentur vel &c. *P.* 54, *l.* 4 *lege*, ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore deſcribitur, ducta in &c. *P.* 57, *l.* 25 *lege*, Nimirum ſi ea ſit corporis &c. *P.* 61, *l.* 12 *lege*, ita ut ſit GA ad AS & Ga ad aS ut eſt KB ad BS, & axe &c. *l.* 15 *lege*, & cum ſit GA ad AS ut Ga ad aS, erit diviſim $Ga - GA$ ſeu Aa ad $aS - AS$ ſeu SH in eadem &c. *P.* 87, *l.* 7 *lege*, per Probl. XIV. &c. *P.* 89 & *P.* 90 *in figura jungatur* FD. *P.* 92 *in figura jungantur* FG & HI. *P.* 136, *l.* 2 *lege*, perimetrum BP &c. *P.* 166, *l.* 8 *lege*, motus uterque erit ut tempus periodicum corporis &c. *P.* 233, *l. ult. lege*, $+ 2QRo^3 +$ &c. *P.* 244; *l.* 22 *lege*, $\frac{2nn - 2n}{n - 2} VG$. *P.* 317, *l. penult. lege*, velocitatem illam maximam H, &c. *P.* 367, *l.* 14 *lege*, eccentricitas foret &c. *P.* 379, *l.* 13 & 23 *lege*, vim centrifugam corporum &c. *P.* 415, *l.* 11 *lege*, Hæc eſt æquatio ſemeſtris motus Nodorum. *P.* 415, *l.* 15 *lege*, alteri ſemeſtri, alteri autem menſtruæ; &c.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

110.

00 5643706

Digitized by Google